



Банк России



Какие показатели разрывов выпуска и реальной деловой активности позволяют прогнозировать инфляцию в России?

СЕРИЯ ДОКЛАДОВ ОБ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

№ 50 / Октябрь 2019 года

Рамис Хабибуллин

Рамис Хабибуллин

Банк России. Электронная почта: KhabibullinRA@cbr.ru

Автор выражает благодарность анонимным рецензентам, Геггели Галиксу, Артему Прохорову, Алексею Пономаренко, Арине Саповой, Сергею Селезневу, Константину Стырину, Андрею Синякову, Николаю Арефьеву, Оксане Малаховской, Григорию Канторовичу, Александру Исакову, Софии Сауль, участникам конференции МЭТА 2018, участникам 22-го семинара Центральные банков по вопросам макроэкономики и участникам семинара Банка России за полезные комментарии и предложения. Автор также благодарен Арине Саповой, Дмитрию Чернядьеву и Александре Живайкиной за методические рекомендации в отношении обработки данных и анализа первичных данных. Все ошибки, которые могут содержаться в данной работе, являются сферой ответственности автора.

Серия препринтов Банка России анонимно рецензируется членами Консультативного совета Банка России по экономическим исследованиям и внешними рецензентами.

Изображение на обложке: Shutterstock.com

© Центральный банк Российской Федерации, 2019 г.

Адрес: 107016, Москва, ул. Неглинная, 12
Тел.: +7 (495) 771-91-00, +7 (495) 621-64-65 (факс)
Веб-сайт: www.cbr.ru

Все права защищены. Мнения, выраженные в данной статье, принадлежат авторам статьи и не обязательно отражают официальную позицию Банка России. Банк России не несет ответственности за содержание статьи. Любое воспроизведение этих материалов возможно только с явного согласия авторов.

Аннотация

В данной работе исследуется точность прогнозирования инфляции на основе ряда показателей разрывов реальных переменных, рассчитанных с помощью моделей пространства состояний. Был рассмотрен ряд байесовских моделей с ненаблюдаемыми компонентами, использующих несколько переменных для оценки реальной экономической активности. При этом было продемонстрировано, что применение показателей разрывов активности реального сектора не повышает точность прогнозирования инфляции в России на тестовой выборке. Это справедливо для месячных и квартальных данных. Оценка проводилась за период с начала 2003 года до конца 2018 года на основе месячных данных и с начала 1999 года до конца 2018 года на основе квартальных данных. Кроме того, оценка в реальном времени ненадежна из-за, того, что при пересмотре данных их значения значительно пересматриваются.

Классификатор JEL: C32, C53, E31, E32, E37

Ключевые слова: кривая Филлипса, факторная модель, модель ненаблюдаемых компонент, разрыв выпуска, байесовская оценка

Содержание

1.	Введение	6
2.	Данные	8
3.	Несколько моделей пространства состояний	9
3.1	Спецификация уравнения инфляции	9
3.2	Тренды реальных переменных и спецификации разрывов	11
3.3	Изменяющиеся во времени параметры и регуляризация	13
3.4	Прогнозирование экзогенных переменных	14
3.5	Краткий обзор всех спецификаций модели	14
4.	Результаты прогнозирования	16
5.	Проверка надежности: сравнение с фильтром Ходрика — Прескотта	19
6.	Достоверность измерений разрывов активности реального сектора	20
7.	Заключение	25
	Список литературы	27
A.	Данные, априорные распределения и инициализация	29
A.1.	Источники данных	29
	Ежемесячные данные	29
	Ежеквартальные данные	30
A.2.	Необходимость предположений в отношении стохастической волатильности	30
A.3.	Априорные распределения и инициализация	32
B.	Описание процедуры оценки	34
B.1.	Тренды реальных переменных	35
	Общий тренд	36
	Трехмерная модель	36
B.2.	Тренд инфляции	36
B.3.	Параметры	36
B.4.	Дисперсии	37
B.5.	Иерархические параметры LASSO	37
B.6.	Вероятности SSVS	37
C.	Расчет предельного правдоподобия	39
C.1.	Этап 1. Интеграция по трендам	39
C.2.	Этап 2. Применение теоремы Рао — Блэквелла в отношении других скрытых состояний.	40
C.3.	Этап 3. Интеграция с учетом параметров	40

D.	Сглаженные оценки трендовых и циклических компонент для спецификации модели DFM	41
E.	Тестовые Р-значения критерия Диболда — Мариано. Ежемесячные данные...	42

1. Введение

При прогнозировании инфляции чаще всего предполагают, что уровень инфляции и уровень безработицы связаны зависимостью типа кривой Филлипса. Макроэкономическая теория позволяет априори рассматривать разрывы реальных переменных (включая разрыв выпуска и разрыв безработицы) как хорошие предикторы инфляции. Например, обычно предполагается, что чем выше разрыв выпуска при прочих равных условиях, тем выше инфляционное давление, и наоборот.

Тем не менее, среди авторов нет единого мнения в отношении методологии оценки динамики переменных, используемых для оценки реальной активности и разрывов реальных переменных. Несмотря на множество существующих методов оценки трендов и разрывов, ни один из них не имеет состоятельной экономической интерпретации (Orphanides, Norden, 2002). В данной работе мы фокусируемся на разложении реальных переменных на трендовые и циклические компоненты на основе модели ненаблюдаемых компонент (UC).

В данной работе было оценено несколько байесовских моделей UC для российской экономики с различными показателями разрывов реальных переменных и показано, что большинство из них незначительно повышают точность прогнозирования инфляции по сравнению со стандартными эталонными моделями с точки зрения среднеквадратической ошибки и предельного правдоподобия. Кроме того, была показана ненадежность таких оценок, поскольку изменение значений в результате пересмотров слишком велико. Это означает, что в момент составления прогноза невозможно быть уверенным в том, что текущие оценки разрыва не изменятся после добавления новых точек данных в выборку¹. Это продемонстрировано на примере двух наборов данных: ежемесячные данные с 2002 по 2018 гг. и ежеквартальные данные с 2000 по 2018 гг. Также было показано, что стандартные методы байесовской регуляризации, включая поиск стохастических спецификаций и иерархические априорные предположения LASSO, не помогают повысить точность прогнозирования.

Эта статья основана преимущественно на статьях по оценке разрыва выпуска и разрыва безработицы с использованием моделей UC. В то время как ранние версии методов оценки разрыва выпуска использовали только одномерные модели UC (см. Harvey, 1985; Watson, 1986; Clark, 1987), недавно появились двумерные и многомерные модели. Начиная с новаторской статьи Kuttner, 1994, стало обычной практикой включать разрыв выпуска в уравнение инфляции с использованием зависимости типа кривой Филлипса (см., среди прочего, Harvey, et al, 2007; Planas, Rossi, 2008; Faust, Wright 2013; Chan, Grant, 2017a). В работе Sinclair, 2009 рассчитана двумерная модель, в которой разрыв безработицы включен в уравнение разрыва выпуска (зависимость Оукена). Современная практика в литературе по моделям НК подразумевает оценку трехмерных моделей с использованием различных дополнительных макроэкономических переменных (Berger, Kempa, 2011 используют систему на основе разрыва выпуска, инфляции и курса валют; Benes, N'Diaye, 2004 используют разрыв выпуска, разрыв безработицы и инфляцию). Grant, Chan, (2017b) представили алгоритм поиска стохастических спецификаций для системы, включающей в себя разрыв выпуска, разрыв безработицы и инфляцию.

В литературе показано (см. Planas, Rossi, 2004; Jarocinsky, Lenza, 2018), что спецификация системы UC может оказать значительное влияние на сглаженные и отфильтрованные оценки разрыва выпуска. Кроме того, оценки UC-фильтров зависят от включения в модель ненулевой

¹ Если сравнивать отфильтрованный разрыв выпуска в периоде t с использованием параметров, оцененных в выборке до периода t , с соответствующим значением разрыва выпуска в периоде t , рассчитанным с использованием полной выборки, то дисперсия корректировок, возникающих в результате подобного пересмотра, будет достаточно высокой.

корреляции между трендовыми и циклическими компонентами (см. [Morley et.al, 2003](#); [Basistha, 2007](#); [Grant, Chan, 2017a](#); [Li, Mendieta-Munos, 2019](#) (forthcomming), где описан более общий случай).

Несмотря на то, что оценки разрыва реальных переменных чувствительны к спецификации модели, одним из часто используемых предикторов высокой инфляции являются оценки этого параметра в реальном времени. Считается, что чем выше разрыв выпуска, тем сильнее инфляционное давление и, при прочих равных условиях, тем более высокую инфляцию следует ожидать. Однако существуют доказательства того, что показатели разрыва выпуска плохо предсказывают инфляцию. [Orphanides, Norden \(2002\)](#) изучили несколько часто используемых методов для анализа оценок разрыва выпуска в США и оценили их способность прогнозировать инфляцию. Авторы использовали как прогнозы в «псевдореальном времени», так и прогнозы на основе полных выборок оценок разрыва выпуска. Они обратили внимание на две основные проблемы. Во-первых, показатели разрыва выпуска ненадежны для данных из США: значительные корректировки при последующем пересмотре оценок разрыва выпуска делают их бесполезными с точки зрения прогнозирования в реальном времени. Во-вторых, большинство рассмотренных моделей показывают, что оценки разрыва выпуска дают низкую точность при прогнозировании инфляции.

Аналогичные расчеты были выполнены на основе данных Европейского союза (ЕС) (см. [Marcellino, Musso, 2011](#); [Jarocinsky, Lenza, 2018](#)). В обеих работах было показано, что неопределенность, возникающая в результате пересмотра, гораздо ниже для данных из ЕС, чем для данных из США. [Marcellino, Musso \(2011\)](#) заявили о низкой прогнозирующей способности стандартных показателей разрыва выпуска. [Jarocinsky, Lenza, 2018](#) предложили несколько спецификаций динамической факторной модели. Они рассчитали разрывы выпуска как общий ненаблюдаемый фактор, полученный из нескольких переменных реальной активности. Они продемонстрировали высокую точность долгосрочного и краткосрочного прогнозирования реальной экономической активности при помощи этих показателей. [Basistha, Nelson \(2007\)](#) рассматривали спецификацию уравнения инфляции, которая включает в себя опережающие и отстающие тренды инфляции. В данной статье используется спецификация инфляции, похожая на спецификацию, используемую в работе ([Chan, 2018](#)).

Некоторые авторы оценивают показатели разрыва выпуска для российской экономики, используя одномерные и многомерные модели УС. В статьях ([Kloudova, 2015](#); [Zubarev and Trunin, 2017](#)) авторы рассчитывали двумерные модели, включая разрывы выпуска в уравнение инфляции. Однако в обоих случаях учитывались только характеристики модели в пределах выборки. В данной работе внимание сосредоточено не на свойствах разрывов активности реального сектора в пределах выборки, а на их способности улучшать прогнозы инфляции за пределами выборки.

[Полбин \(2019, готовится к публикации\)](#) оценил корректировку разрыва выпуска с учетом динамики цен на нефть. Поскольку изменение цены на нефть существенно коррелирует с индексом потребительских цен (инфляцией), этот признак может улучшить точность прогнозирования разрыва выпуска. Тем не менее, в рамках данной работы не удалось добиться существенного уменьшения среднеквадратической ошибки в модели такого типа.

Вместо прогнозирования уровней инфляции можно прогнозировать неожиданное отклонение инфляции (разность между уровнем инфляции и прогнозом инфляции). Зависимость на основе кривой Филлипса можно рассматривать в предположении, что разрыв выпуска связан с неожиданным отклонением инфляции (см. [Coibion, Gorodnichenko, 2015](#)). Во-первых, в рамках данного препринта была построена кривая Филлипса для общего тренда с инфляционными ожиданиями, используя прогнозы из опросов Bloomberg и InFOM. Во-вторых, инфляционные ожидания можно рассматривать как функцию нескольких наблюдаемых переменных. Основная проблема заключается в спецификации этой функции. Но ввиду отсутствия подходящего критерия для разграничения моделей, решение данной задачи остаётся открытой.

Все модели УС, рассмотренные в данной работе, были оценены с использованием генератора выборки Гиббса. Все ненаблюдаемые состояния, такие как тренды, разрывы и изменяющиеся во времени отклонения, были оценены с использованием модели сглаживания, предложенной в работе [Chan, Jeliazkov, 2009](#). Эта процедура сглаживания используется в качестве альтернативы к [Carter–Kohn, 1994](#) и [Durbin–Koopman, 2002](#), поскольку маргинальная функция правдоподобия² записывается как аналитическая функция ненаблюдаемых состояний. Подробное описание всех шагов для генератора выборки Гиббса можно найти в Приложении Б³.

Данная работа имеет следующую структуру. В разделе 2 описаны данные. В разделе 3 представлена спецификация модели. Основные результаты прогнозирования описаны в разделах 4 и 5 (включая сравнения с фильтром Ходрика — Прескотта). Раздел 6 содержит результаты пересмотра разрыва реальных переменных

2. Данные

В данной работе используется два набора данных: ежеквартальные данные и ежемесячные данные. Ко всем переменным применены фильтры сезонной корректировки X-13ARIMA-SEATS. Каждый набор данных были разделены на три блока: блок реальных переменных, блок, связанный с инфляцией, и блок экзогенных переменных. К сожалению, из-за отсутствия данных винтажей к моменту написания работы за длительный период для России не было возможности учесть пересмотры данных.

Подход на основе квазиреального времени подразумевает, что каждый раз, когда составляется прогноз, необходимо прогнозировать не только инфляцию, но и разрывы и экзогенные переменные для прогноза инфляции в реальном времени⁴. Это усиливает неопределенность сценария, и в результате прогнозы могут быть даже хуже, чем в простой конкурирующей модели без дополнительных регрессоров.

Для формирования квазиреальных прогнозов использовались два набора: ежемесячные данные и ежеквартальные данные. Краткое описание обоих наборов данных можно найти в [Приложении А](#).

Набор ежеквартальных данных. Блок реальных переменных состоит из следующих серий: 0) реальный ВВП y_t^0 , 1) реальные инвестиции y_t^1 , 2) реальный экспорт y_t^2 , 3) реальный импорт y_t^3 , 4) деловая уверенность y_t^4 , 5) индекс промышленного производства (ИПП) y_t^5 , 6) загрузка производственных мощностей y_t^6 , 7) уровень безработицы y_t^7 . Все переменные, кроме уровня безработицы, были прологарифмированы. Уровень безработицы был взят в процентах.

Показатель инфляции основан на ИПЦ, рассчитанном Росстатом p_t . Инфляция была рассчитана по формуле $\pi_t = 100 \times (\log(p_t) - \log(p_{t-1}))$. Для оценки модели используется показатель квартальной инфляции. Целью исследования является прогнозирование годовой инфляции. Для случая ежеквартальных данных используются прогнозы Bloomberg на будущий квартал в качестве прокси-переменной для инфляционных ожиданий, а для случая ежемесячных данных — прогнозы InFOM Survey на будущий квартал.

Были использованы только две экзогенные переменные: Инфляция цен на нефть марки Brent ($\pi_t^{oil} = 100 \times (\log(p_t^{oil}) - \log(p_{t-1}^{oil}))$) и изменение логарифмического эффективного валютного курса по расширенному набору данных БМР).

² В этой работе определим «функцию правдоподобия» как плотность $p(Y|\theta, X, \psi)$, а «маргинальную функцию правдоподобия» — как плотность $p(Y|X, \psi)$. Здесь θ — параметры, Y, X — эндогенные и экзогенные переменные, ψ — априорные гиперпараметры. См. [приложения А и Б](#), где представлены термины и определения.

⁴ Разрывы прогнозировались при помощи AR-процесса для разрывов и экзогенных переменных, с использованием простой VAR-модели с автоматическим выбором лага на основе байесовского информационного критерия.

Все ряды ежеквартальных данных доступны с начала 1999 года. Однако инфляционные ожидания доступны только начиная с 1-го квартала 2008 года. Квартальные данные заканчиваются 4-ым кварталом 2018 года. Все модели были рассчитаны с 1-го квартала 2000 года. Вместо того чтобы использовать инфляционные ожидания, был оценён общий тренд инфляционных ожиданий и самой инфляции.

Набор ежемесячных данных. Набор ежемесячных данных состоит из большего числа реальных переменных. Однако, большая их часть начинается с 1-го квартала 2003 года. Блок ежемесячных реальных переменных включает в себя все временные ряды из набора ежеквартальных реальных переменных, кроме реального ВВП. Были добавлены несколько переменных: 8) индекс грузоперевозок, 9) индекс розничной торговли, 10) индекс строительства. Все эти ряды данных были преобразованы в логарифмические переменные.

Месячная инфляция также основана на показателе ИПЦ от Росстата и рассчитывается аналогично. Использовались данные InFOM по прогнозам инфляции домашних хозяйств для оценки инфляционных ожиданий. Однако, эти временные ряды доступны только начиная с 1-го квартала 2011 года. Все модели оценивались по выборке с начала 2003 года.

В этой работе рассмотрены рекурсивные прогнозы. Чтобы сформировать рекурсивные прогнозы, выборка итеративно была разделена на обучающую и тестовую выборки. Модели оцениваются с использованием данных в обучающей выборке. Наименьшая обучающая выборка начинается с начала доступного ряда данных (январь 2003 г. или 1-й квартал 1999 г.) и заканчивается августом 2007 г. (3-й квартал 2007 г.). Затем рекурсивно добавлялся дополнительный месяц (квартал) в обучающую выборку и формировывался прогноз на 12 месяцев. Данная процедура повторялась для всей тестовой выборки.

В качестве критерия силы прогноза использовалась среднеквадратичная ошибка прогноза на тестовой выборке, которая начинается с августа 2007 года (4-й квартал 2007 года) и заканчивается в декабре 2018 года (4-й квартал 2018 года). Для каждой модели, оцененной в тестовой выборке, рассчитывался прогноз инфляции на 1, 3, 6 или 12 месяцев (1, 2, 3 или 4 квартала) и вычислялись средние значения среднеквадратической ошибки только по самой инфляции (без учета точности прогнозирования других переменных в модели). Чтобы минимизировать проблему выбора лага, для каждого значения лага от 1 до 3 были рассчитаны оценки логарифмов маргинального правдоподобия, и выбрана модель с максимальным значением этого показателя.

3. Несколько моделей пространства состояний

Взяв за основу модель, описанную в работе [Jarocinsky, Lenza, 2018](#), были оценены несколько версий моделей УС, которые включают в себя показатели разрыва реальных переменных в качестве предикторов инфляции. Каждая модель была построена как комбинация нескольких блоков спецификаций, перечисленных ниже. Чтобы различать предложенные модели, для каждого из этих предположений была введена соответствующая аббревиатура. [Приложения А и Б](#) содержат информацию обо всех параметрах и обозначениях переменных.

3.1 Спецификация уравнения инфляции

Для прогнозирования инфляции использовалась расширенная версия моделей НК для инфляции со стохастической волатильностью ([Chan, 2013](#)). Уравнение наблюдаемой переменной для инфляции выглядит следующим образом:

$$z_t = \pi_t - \tilde{\pi}_t - \sum_{r=0}^R (\lambda_r g_{t-r} + X'_{t-r} \beta_r) \quad (1)$$

$$z_t = \sum_{j=1}^q \varphi_j z_{t-j} + \exp(0.5 \times h_t^\pi) \varepsilon_t^\pi, \quad (2)$$

где $\tilde{\pi}_t$ — тренд инфляции, g_t — разрыв реальных переменных, определенный ниже, X_t — экзогенные переменные, определенные ниже, h_t^π — логарифмическая зависящая от времени дисперсия инфляции, q — число лагов для МА-части модели, R — число лагов для разрывов реальных переменных и экзогенных переменных, а $\varepsilon_t^\pi \sim i.i.d.N(0,1)$ — вектор ошибки наблюдаемой переменной.

Тренд инфляции определяется следующим образом:

$$\tilde{\pi}_t = \sum_{s=1}^p \rho_s^\pi \tilde{\pi}_{t-s} + \exp(0.5 \times q_t^\pi) v_t^{\pi tr} \quad (3)$$

где q_t^π — логарифмическая зависящая от времени дисперсия тренда инфляции, p — длина лага для AR-части тренда инфляции. Если $p = 1, q = 0$ и $\rho_1 = 1$, этот вариант разложения на трендовые и циклические компоненты повторяет модель [Stock, Watson, 2007](#). Однако, как будет показано ниже, предлагаемая спецификация тренда с оценочными параметрами ρ_s^π лучше прогнозирует инфляцию в России.

Вектор X_t содержит инфляцию цен на нефть, изменение номинального валютного курса и тренд ожидаемой инфляции. Тренд ожиданий для месячных данных был оценен как общий тренд двух переменных ожидания, предоставленных агентством InFOM. Квартальные ожидания данных состоят только из прогнозов Bloomberg Consensus на квартал вперед. Для оценки общего тренда инфляционных ожиданий была выбрана простейшая спецификация:

$$\pi_k^e = \tilde{\pi}_t^e + \sigma_{ek} \varepsilon_t^{ek}, k = 1 \dots K \quad (4)$$

$$\tilde{\pi}_t^e = \tilde{\pi}_{t-1}^e + \sigma_{e.tr} v_t^{\pi e} \quad (5)$$

где $K = 2$ для ежемесячных данных и $K = 1$ для квартальных данных. Обратите внимание, что ожидания доступны только с 2011 года для ежемесячных данных и с 2008 года для квартальных данных. Это приводит к возникновению двух проблем. Во-первых, из-за отсутствия точек данных тренд ожидания можно было подставить в модель только с 10-го периода после начала ряда ожиданий. Во-вторых, оценка тренда ожиданий очень нестабильна в условиях малых выборок. Чтобы сгладить эту проблему, была выбрана низкая априорная дисперсия $\sigma_{e.tr}$ для процесса тренда (подробнее см. в [Приложении А](#)).

Одним из наиболее важных вопросов предлагаемой спецификации инфляции является выбор гиперпараметров длины лага (q , R и p). Следуя методике оценки стандартных моделей УС ([Chan, 2013](#)), были выбраны максимальные значения этих гиперпараметров равными $p_{max} = 2$, $q_{max} = 11$, $R_{max} = 12$ для месячных данных и $p_{max} = 2$, $q_{max} = 3$, $R_{max} = 3$ для квартальных данных.

В этой работе логарифмическая стохастическая дисперсия определяется через стандартный процесс случайного блуждания:

$$h_t^j = h_{t-1}^j + \sigma_{h,j} \xi_t^{h,j}; \quad q_t^j = q_{t-1}^j + \sigma_{q,j} \xi_t^{q,j} \quad (6)$$

где h_t^j — логарифмическая дисперсия для уравнения наблюдаемой j , q_t^j — логарифмическая дисперсия для уравнения состояния j , $\xi_t^{h,j}$, $\xi_t^{q,j} \sim \chi^2$. Оценки сглаженных ненаблюдаемых стохастической волатильности оцениваются с использованием аппроксимации с помощью смеси нормальных распределений ([Kim, et. al, 1998](#)). Чтобы проверить, необходимо ли учитывать стохастическую волатильность, было проведено сравнение байесовских факторов⁵ для

⁵ Байесовский фактор — это отношение апостериорных вероятностей двух моделей. На практике удобнее оценивать логарифмический байесовский фактор: $\log(BF(1, 2)) = \log(p(M_1|Data)) - \log(p(M_2|Data))$. Чем выше байесовский фактор, тем более вероятна модель 1 по сравнению с моделью 2.

нескольких спецификаций модели, оцененных с использованием метода из работы (Chan, 2018) (см. подробнее в Приложении Б). Модель со стохастической волатильностью как в наблюдениях, так и в уравнениях ненаблюдаемых компонент имеет максимальный байесовский фактор. Следовательно, эта модель предпочтительнее других.

Для расчета значений среднеквадратической ошибки каждая модель оценивалась 120 раз для месячных данных и 32 раза для квартальных данных. Чтобы выбрать длину лага сравнивались маргинальные функции правдоподобия (свойство «в пределах выборки») ⁶. Чтобы оценить предельные значения правдоподобия, использовалось приближение, предложенное в работе Chib (1995) для результатов работы генератора выборки Гиббса (подробнее см. в Приложении Б).

В качестве базовых рассматривались только три различных спецификации уравнения инфляции:

1. **UCSV**. Это стандартная спецификация инфляции с ненаблюдаемыми компонентами, предложенная в работе Stock, Watson (2007). В этом случае нет внешних переменных: $q = 0$; $\beta_r = 0$; $p = 1$; $\rho_1 = 1$. Для этого класса спецификаций будут только добавляться или удаляться разрывы реальных переменных, определенные в следующем разделе.
2. **UCSVM**. Эта спецификация задана уравнениями (1–3), но экзогенные переменные не включены: $\beta_r = 0$.
3. **UCSVMAX**. Эта спецификация задана уравнениями (1–5) без каких-либо ограничений.

3.2 Тренды реальных переменных и спецификации разрывов

3.2.1 Эталонная модель

Основной моделью, используемой в этой статье, является спецификация квазидинамической факторной модели (QDFM), аналогичная представленной в работе Jarocinsky, Lenza, 2018. Идея этой модели состоит в том, чтобы оценить общий фактор разрывов реальных переменных. Этот разрыв определяется как разрыв одной из эталонных переменных y_t^0 и в то же время является общим фактором для всех других реальных переменных $y_t^n, n = 1..N$. Jarocinsky, Lenza, 2018 используют реальный ВВП в качестве эталонной переменной и интерпретируют разрыв как показатель «разрыва выпуска». В этой статье в качестве эталонных переменных рассматривается реальный ВВП для ежеквартальных данных и индекс реального промышленного производства для ежемесячных данных ⁷.

Эталонная переменная моделируется в виде стандартного разложения на трендовую и разрывную компоненты:

$$y_t^0 = \mu_t^0 + g_t, \quad (6QDFM1)$$

где μ_t^0 — тренд эталонной переменной, g_t — общий фактор разрыва. Все остальные реальные переменные определяются следующим образом:

$$y_t^n = \mu_t^n + \sum_{r=0}^R B_r^n g_{t-r} + \varepsilon_t^n, \quad n = 1..N \quad (6QDFM2)$$

где $\varepsilon_t^n \sim N(0, \exp(h_t^n))$, h_t^n — зависящая от времени логарифмическая волатильность, μ_t^n — тренд n -й реальной переменной, N — количество реальных переменных, не считая эталонной.

⁶ Байесовский информационный критерий BIC и информационные критерии девиации DIC (см. Grant, Chan, 2016) также могут применяться для выбора длины лага. Однако нет единого мнения о том, какой тип критерия отклонения следует использовать в прогнозировании, поэтому был выбран стандартный критерий, используемый в литературе по байесовским методам. Таким образом решалась задача прогнозирования в реальном времени без будущей информации о точности прогноза. Альтернативный вариант — использовать методы перекрестной проверки для выбора гиперпараметров модели. Однако длина выборки слишком мала, чтобы реализовать перекрестную проверку.

⁷ Тем не менее, можно выбрать другие переменные, которые будут эталонными. В своей работе по прогнозированию используются спецификации с разными эталонными переменными.

Параметры B_r^n могут рассматриваться как факторы нагрузки для общего фактора разрыва. R — лаги общего разрыва включены в уравнение (QDFM2), а также и длина лага всех экзогенных переменных в модели.

Вслед за работой (Planas, et al, 2008) использовалась следующая спецификация разрыва:

$$g_t = \rho_1^g g_{t-1} + \rho_2^g g_{t-2} + v_t^g \quad (7a)$$

$$\rho_1^g = 2A \cos\left(\frac{2\pi}{\omega}\right); \rho_2^g = -A^2 \quad (7b)$$

где $v_t^g \sim N(0, \sigma_g^2)$, параметры (ρ_1^g, ρ_2^g) являются функциями параметров A и ω .⁸

Разрывы по определению зависят от спецификаций трендов. В этой статье мы используем несколько популярных спецификаций трендов (Grant, Chan, 2018; Jarocinsky, Lenza, 2018). Для каждой из реальных переменных $s = 0..N$:

Случайное блуждание с дрейфом: $\mu_t^s = \alpha_0^s + D_t' \zeta + \mu_{t-1}^s + v_t^{\mu.s}$ (8RWD)

Интегрированное случайное блуждание: $\mu_t^s = \alpha_t^s + \mu_{t-1}^s$ (8IRW1)

$$\alpha_t^s = \alpha_{t-1}^s + v_t^{\alpha.s} \quad (8IRW2)$$

Простой линейный тренд: $\mu_t^s = \alpha_0^s + \alpha_{tr}^s t + D_t' \zeta + v_t^{\mu.s}$ (8SLT)

где α_0^s — постоянный дрейф, α_t^s — изменяющийся во времени дрейф, μ_0^s — постоянное слагаемое, $v_t^{\mu.s} \sim N(0, \sigma_{\mu.s}^2)$, $v_t^{\alpha.s} \sim N(0, \sigma_{\alpha.s}^2)$. D_t — матрица фиктивных переменных, учитывающая аддитивные и инновационные выбросы для кризисов августа 2008 года и декабря 2014 года⁹.

В соответствии со спецификацией модели, представленной в работе (Полбин, 2019), для ИПП также рассматривалась дополнительная спецификация модели (GOIL), в которой инфляция цен на нефть влияет на разрыва выпуска:

$$\mu_t^s = \alpha + \mu_{t-1}^s + \sum_{s=0}^r \beta_s^{goil} \pi_{t-s}^{oil} + v_t^{\mu.s} \quad (7TOIL)$$

Блок реальных переменных включает в себя все переменные, описанные в разделе 2. Выбор эталонной переменной существенно влияет на итоговый показатель общего разрыва. Любая переменная может быть выбрана в качестве эталонной для прогнозирования инфляции. С одной стороны, реальные показатели ВВП и ИПП являются разумными кандидатами в эталонные переменные.

С другой стороны, реальные показатели ВВП и ИПП в России в рассматриваемый период имели низкую волатильность. Это означает, что другие реальные переменные могут либо внести дополнительную информацию, полезную для прогнозов, либо вызвать дополнительный шум. Поэтому были оценены несколько квазидинамических факторных моделей с альтернативными эталонными переменными.

Вторая задача заключается в выборе количества факторов. В спецификации эталонной модели рассматривается только один общий разрыв. Начиная с оригинальной работы (Bei, Ng, 2003), стало обычной практикой выбирать количество факторов, используя информационные критерии. Однако в рамках этого подхода предполагается, что число периодов и/или переменных велико. В этой статье предположение не выполняется.

⁸ Вместо того чтобы использовать такую спецификацию, Jarocinsky, Lenza, 2018 и Grant, Chan, 2018 ограничивают параметры (ρ_1, ρ_2) для генерации стационарного процесса. Однако было обнаружено, что такой подход приводит к нестабильности прогнозов в начале выборки. Также циклический процесс можно задать с использованием матрицы перестановок (Harvey, et.al, 2007). Для оценки параметров использовался алгоритм Метрополиса — Гастинга с адаптивным шагом для оценки параметров (A, ω) . Подробнее см. в Приложении Б.

⁹ Были сделаны рекурсивные прогнозы, поэтому длина выборки оценки отличалась на каждом этапе прогнозирования. Фиктивная переменная для конкретного события включается только в том случае, если в выборке присутствует не менее шести точек после события.

3.2.2 Модель общего тренда

Экономическая теория предсказывает, что все реальные переменные могут быть описаны не только общим компонентом разрыва, но и общим трендом реальных переменных μ_t^{com} . С таким предположением можно определить модель следующим образом:

$$y_t^0 = \mu_t^{com} + g_t \quad (9QDFMCT1)$$

$$y_t^n = A^n \mu_t^{com} + \sum_{r=0}^R B_r^n g_{t-r} + \varepsilon_t^n, \quad n = 1..N \quad (9QDFMCT2)$$

где набор из N реальных переменных включает в себя все переменные из предыдущего описания, за исключением деловой уверенности и уровня безработицы¹⁰. Динамика общего тренда μ_t^{com} определяется аналогично описанию в предыдущем разделе (уравнения 8).

3.2.3 Трехмерная модель

Одной из самых популярных моделей пространства состояний для разложения на трендовые и циклические компоненты является система из трех уравнений: реальный ВВП (ИПП), уровень безработицы и инфляция. Для такой модели будет использоваться сокращение TVM. Описание модели приведено ниже. Уровень безработицы u_t складывается из неускоряющегося уровня безработицы u_t^* (NAIRU) и циклического компонента u_t^g :

$$u_t = u_t^* + u_t^g \quad (10TVM)$$

$$u_t^* = \alpha_t^u + u_{t-1}^* \quad (11TVM)$$

$$\alpha_t^u = \alpha_{t-1}^u + v_t^{u*} \quad (12TVM)$$

$$u_t^g = \rho_1^u u_{t-1}^g + \rho_2^u u_{t-2}^g + v_t^{ug} \quad (12TVM)$$

где α_t^u — зависящее от времени начальное значение NAIRU, а параметры (ρ_1^u, ρ_2^u) ограничены для генерации стационарного процесса, $v_t^{ug} \sim N(0, \sigma_{ug}^2)$; $v_t^{u*} \sim N(0, \sigma_{u*}^2)$.

Реальный ВВП (ИПП) y_t^0 состоит из трендовой и циклической компонент. Мы предполагаем, что они связаны законом Оукена:

$$y_t^0 = \mu_t^0 + \delta_u(u_t - u_t^*) + g_t, \quad (13TVM)$$

где μ_t^0 определяется уравнениями (8), а разрыв g_t определяется как авторегрессионный процесс (7).

Уравнения состояния и наблюдаемых величин для инфляции такие же, как в разделе 3.1.

3.2.4 Двумерные модели

Вместо того, чтобы использовать в модели несколько реальных переменных, можно рассмотреть простейший возможный случай с единственной реальной переменной и инфляцией. Для этого типа моделей автор перебрал несколько реальных переменных и использовал только формулировку тренда в виде интегрированного случайного блуждания (8IRW1-2). Следовательно, для этой формулировки:

$$y_t^s = \mu_t^s + g_t, \quad s \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (14BVM)$$

Эта простая модель является одним из естественных эталонов для предлагаемой формулировки квазидинамических факторных моделей.

3.3 Изменяющиеся во времени параметры и регуляризация

У реальных переменных и динамики инфляции в экономике России есть две особенности. Обычно считается, что в выборке было несколько структурных шоков, связанных с изменением денежно-кредитной политики и динамикой цен на нефть. Это могло привести к изменению параметров. Чтобы учесть эту разницу, я добавил изменяющиеся во времени параметры в уравнение инфляции только для двумерных моделей и рассматриваю этот случай как частный.

¹⁰ Это связано с тем, что отдельные тренды для этих переменных значительно отличаются от трендов для других реальных переменных.

Следовательно, модель эквивалентна модели в разделе 3.2.4 за исключением уравнения разрыва инфляции, которое будет следующим:

$$z_t = \pi_t - \bar{\pi}_t - \sum_{r=0}^R (\lambda_r^{(t)} g_{t-r} + X'_{t-r} \beta_r) \quad (16TVP1)$$

$$\lambda_r^{(t)} = \lambda_r^{(t-1)} + v_t^r \quad (16TVP2)$$

В случае квазидинамической факторной модели количество параметров велико. Это может привести к чрезмерной аппроксимации модели, особенно в начале тестовой выборки. Более того, непонятно, какие реальные переменные должны быть включены в оценку общего фактора разрыва. Эта проблема стоит особенно остро для ежеквартальных данных. Поэтому была произведена попытка выполнить регуляризацию модели для ежеквартальных данных.

Используя процедуру (Korobilis, 2013), были оценены иерархические модели байесовского LASSO для параметров уравнения инфляции λ_r и β_r и для параметров факторных нагрузок B_r^n . Пусть $Hpar = (\lambda_r, \beta_r, B_r^n)$. Придерживаясь такого подхода, мы можем рассматривать параметры априорного распределения не только как строгие гиперпараметры модели, но и как случайную величину. В этой работе мы сосредоточимся в основном на параметрах априорной дисперсии. При регрессии типа LASSO они имеют экспоненциальное априорное распределение:

$$p(\text{var}(Hpar_i)) \sim \exp(0.5 \times (\overline{Hpar})^2)$$

Эта формулировка модели смещает значения параметров к нулю в зависимости от значения гиперпараметра $\overline{Hpar}$.

Вслед за работой (Grant, Chan, 2018), мы также рассмотрим алгоритм поиска стохастической спецификации (SSVS) в зависимости от дисперсии параметров $\text{var}(Hpar)$ на основе процедуры, предложенной в (George, et. al, 2008). Процедура основана на выборке дискретной случайной величины u_i , которая указывает на переход между двумя предполагаемыми априорными дисперсиями. Например, если $u_i = 1$, то априорная дисперсия низкая (это эквивалентно случаю с ограниченным параметром). В противном случае, если $u_i = 0$, то априорная дисперсия высокая (это эквивалентно случаю с неограниченным параметром). Подробнее см. в Приложении Б.

3.4 Прогнозирование экзогенных переменных

Для прогнозирования инфляции цен на нефть и динамики логарифмического номинального валютного курса использовалась прост модель VAR с двумя переменными и автоматическим выбором длины лага на основе критерия BIC. Такой подход применялся итеративно каждый раз при формировании прогноза.

3.5 Краткий обзор всех спецификаций модели

Комбинации вышеупомянутых допущений меняют спецификации модели. В этой работе рассматривается только часть из них. Характеристики каждой оцениваемой модели приведены в Таблице 2.

Таблица 1. Характеристики всех рассматриваемых моделей

МОДЕЛЬ	ТИП ТРЕНДА	РЕЗУЛЬТАТ	БЛОК РЕАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ	РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ
UCSV	—	—	—	—
UCSVMA	—	—	—	—
UCSVMAX	—	—	—	—
UCSVMAX DFM	RWD, IRW, SLT	Несколько эталонных переменных	Все	—
UCSVMAX DFMCT	IRW	Реальный ВВП, ИПП	Все	—
UCSVMAX TVM	RWD	X	Только уровень безработицы	—
UCSVMAX BVM	RWD, IRW, SLT, TOIL	Несколько эталонных переменных	—	—
UCSVMAX DFM HIER, BMA	RWD, IRW, SLT	X	—	LASSO, BMA

Первые три модели являются стандартными базовыми моделями для сравнения, упоминаемыми в литературе, посвящённой UC моделям ([Chan, 2013](#)). В спецификации UCSVMAX DFM используется вся доступная информация из блока реальных переменных для прогнозирования инфляции, и эта спецификация рассматривается как основной эталон. Наиболее естественным конкурентом этой модели является двумерная модель (UCSVMAX BVM). Чтобы проверить, насколько наиболее часто упоминаемые в литературе спецификации повышают точность прогнозирования, были включены спецификации UCSVMAX TVM, UCSVMAX CYC и UCSVMAX DFMCT.

Очевидно, что некоторые модели являются вложенными, и некоторые из них накладываются друг на друга. Этот факт имеет решающее значение для процедур тестирования за пределами выборки и интерпретации результатов. Соотношения между этими моделями показаны на [Рисунке 1](#).

Каждая модель была оценена с использованием генератора выборки Гиббса, описанного в [Приложении Б](#). На каждом шаге прогнозирования использовались 100 000 итераций с обучением в течение 40 000 итераций.

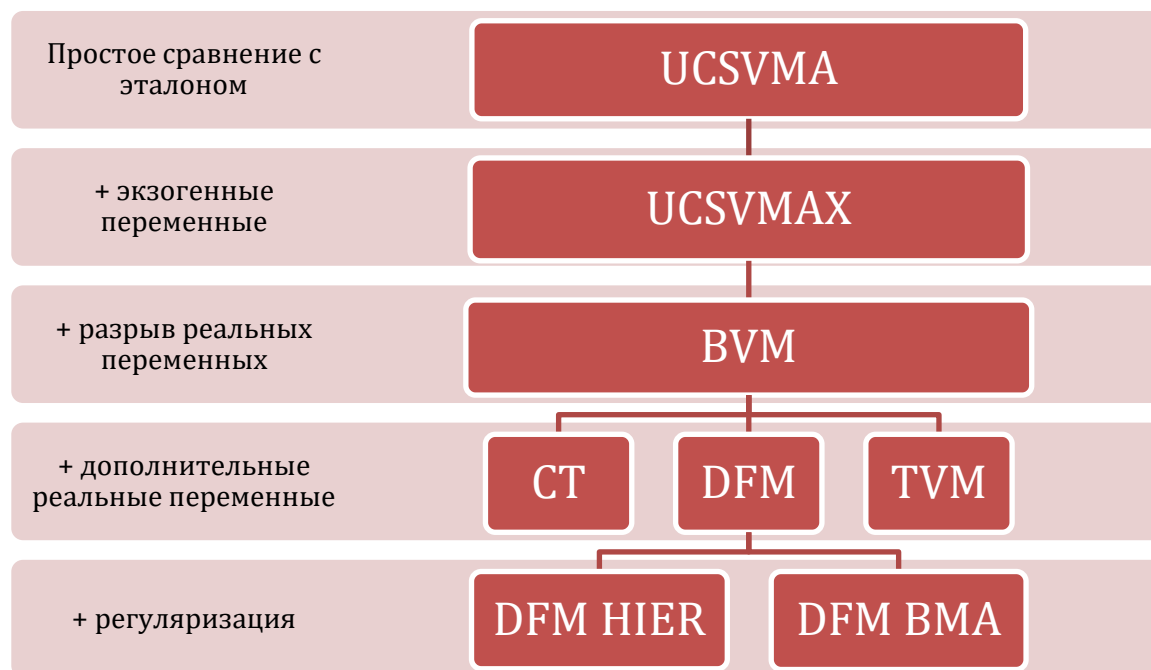


Рисунок 1. Связь между рассматриваемыми моделями

4. Результаты прогнозирования

Ежемесячные данные. Поскольку основной эталонной моделью в данной работе является квазидинамическая факторная модель, разложение на трендовые и циклические компоненты для нескольких эталонных реальных переменных представлены в [Приложении Г](#). Среднеквадратические ошибки для каждой модели показаны в Таблице 3. Для всех спецификаций тренда BVM и DFM выбраны лучшие спецификации с точки зрения среднеквадратической ошибки (для каждой из эталонных переменных были оценены формулы трендов IRW (интегрированное случайное блуждание), RWD (случайное блуждание с дрейфом) и RW (случайное блуждание)). Тестовая выборка состоит из 120 точек и начинается с августа 2008 года.

Прогнозируемый показатель инфляции выражен в процентах. Первые 5 столбцов содержат значение среднеквадратической ошибки прогноза на 1, 3, 6, 9 и 12 месяцев. В последнем столбце представлена совокупная инфляция в годовом прогнозе. Прогноз годовой инфляции рассчитывался как сумма месячных прогнозов $\sum_{j=1}^{12} \hat{\pi}_{t+j}$ и сравнивался с фактической годовой инфляцией $\sum_{j=1}^{12} \pi_{t+j}$ в каждый момент времени t .

Таблица 2. Оценки среднеквадратической ошибки для моделей ежемесячных данных (Р-значения критерия Дибольда — Мариано (Diebold, Mariano, 1995) по сравнению с UCSVMAX представлены в Приложении Е).

	1 МЕС	3 МЕС	6 МЕС	9 МЕС	12 МЕС	В ГОДОВОМ ИСЧИСЛЕНИИ
UCSV	0,266	0,443	0,477	0,494	0,581	4,417
UCSVMA	0,323	0,390	0,411	0,450	0,512	3,669
UCSVMAX	0,299	0,388	0,408	0,434	0,467	3,435
UCSVMAX DFM IPI IRW	0,328	0,396	0,418	0,462	0,482	3,469
UCSVMAX DFM EXP IRW	0,308	0,398	0,406	0,434	0,467	3,468
UCSVMAX DFM IMP IRW	0,310	0,403	0,405	0,438	0,474	3,518
UCSVMAX DFM EMP RWD	0,300	0,392	0,414	0,460	0,493	3,634
UCSVMAX DFM CONSTR RWD	0,299	0,386	0,405	0,443	0,482	3,446
UCSVMAX DFM CARGO IRW	0,312	0,392	0,412	0,444	0,479	3,560
UCSVMAX DFM BUSCONF RW	0,304	0,393	0,398	0,437	0,476	3,426
UCSVMAX DFM RETAIL RWD	0,306	0,388	0,402	0,447	0,484	3,590
UCSVMAX DFM UNEMP RW	0,313	0,380	0,426	0,467	0,500	3,467
UCSVMAX CT IPI IRW	0,306	0,405	0,419	0,463	0,504	3,765
UCSVMAX TVM	0,380	0,390	0,402	0,453	0,473	3,431
UCSVMAX BVM IPI IRW	0,299	0,397	0,406	0,450	0,473	3,461
UCSVMAX BVM EXP IRW	0,291	0,395	0,410	0,461	0,477	3,579
UCSVMAX BVM BUSCONF RWD	0,403	0,520	0,545	0,541	0,633	4,969
UCSVMAX BVM UNEMP RW	0,270	0,389	0,406	0,465	0,481	3,434
UCSVMAX BVM CARGO RW	0,241	0,412	0,391	0,444	0,463	3,431**
UCSVMAX BVM IPI TOIL	0,327	0,441	0,486	0,495	0,522	4,487

Таблица 2 с результатами разделена на 3 блока. Первый блок содержит стандартные эталонные модели UCSV ([Stock, Watson, 2007](#)) и ее модификацию UCSVMAX ([Chan, 2013](#)). Второй блок состоит из квазидинамических факторных моделей с различными эталонными переменными. Третий блок состоит из других сравниваемых моделей.

Как видно, инфляция цен на нефть и динамика номинального валютного курса значительно улучшают прогнозы в квазиреальном времени: во всех случаях среднеквадратическая ошибка для UCSVMAX ниже, чем для UCSV.

Ни одна из эталонных переменных не повышает точность прогнозирования по сравнению с этими контрольными моделями. Это справедливо для спецификаций DFM и BVM. Более того, с точки зрения среднеквадратической ошибки разница между моделями незначительна. Чтобы выяснить причину такого положения вещей, были рассчитаны также рекурсивные оценки среднеквадратической ошибки за 2 года. Среднеквадратичные ошибки рассчитывались в двухлетнем окне тестовой выборки и рекурсивно это окно перемещалось на один месяц вперед. Результаты для спецификаций BVM показаны на рисунке 2. Результаты для спецификаций DFM примерно схожи.

Более того, видно, что включение динамики цен на нефть в уравнение тренда (спецификация BM TOIL) не улучшает, а ухудшает точность прогнозирования. Это может быть связано с тем, что инфляцию цен на нефть сложнее прогнозировать, а изменение цен на нефть существенно влияет на крутизну линии тренда промышленного производства.

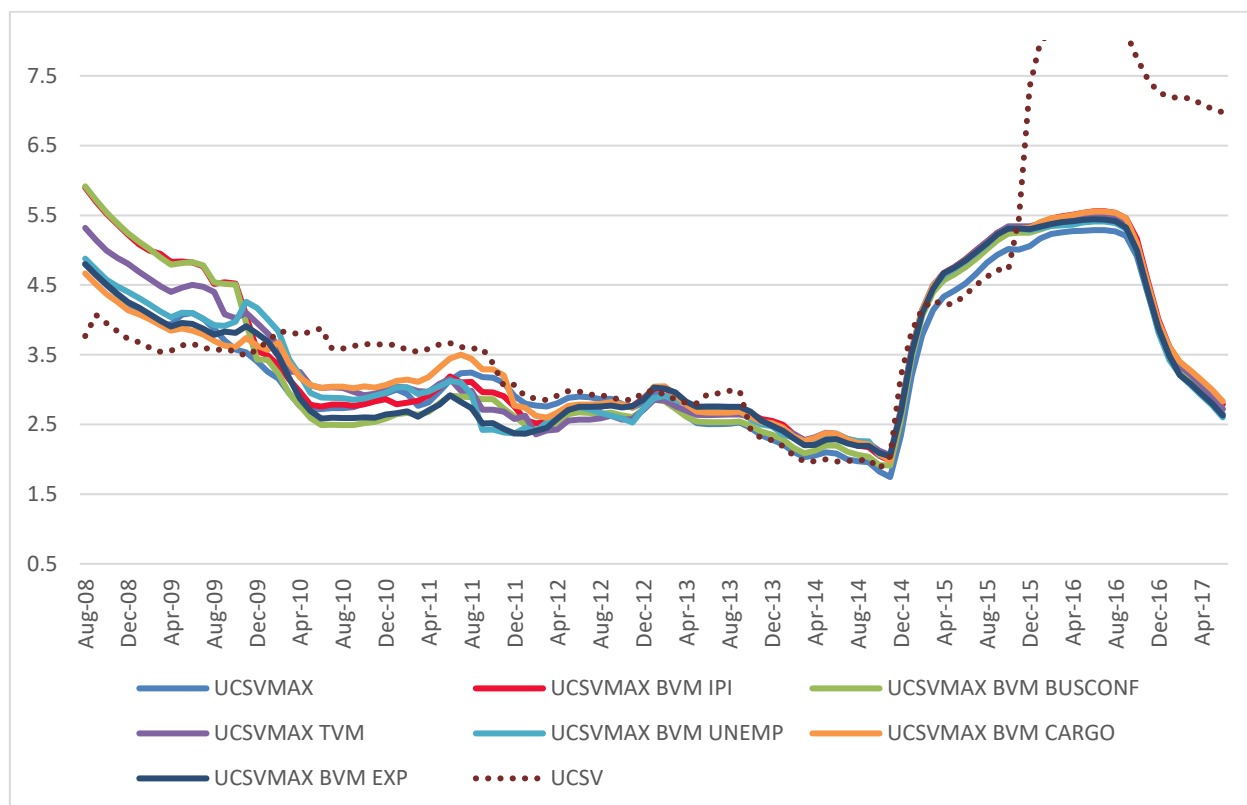


Рисунок 2. Рекурсивные среднеквадратические ошибки для нескольких моделей.

Каждый момент времени на рисунке 2 является последней точкой двухлетнего окна расчета среднеквадратической ошибки. Как видно, основной проблемой прогнозов на основе двумерных моделей является кризис 2008 года. Это можно объяснить низкой волатильностью российских реальных переменных до кризиса. Из-за резкого изменения реальных переменных перед кризисом прогнозы разрыва были изменчивыми, что приводило к большим значениям среднеквадратической ошибки.

В период кризиса 2014 года все рассмотренные модели имели примерно одинаковую точность прогнозирования, кроме уровня безработицы и индекса тарифов на грузовые перевозки. Также можно заметить, что точность прогноза ИПП совсем не повышается. В то же время, включение уровня безработицы помогает прогнозировать инфляцию накануне кризиса в 2014 году. Трехмерная модель не улучшает этот прогноз. Реальные ряды экспорта, с одной стороны, повышают точность прогнозирования в периоды кризиса, но при этом значительно ухудшают точность в периоды стабильности.

Более того, использование общего факторного разрыва не улучшает показатели среднеквадратической ошибки прогноза.

Это можно объяснить для нескольких переменных. Основная проблема российских данных о реальной макроэкономической активности заключается в том, что доступны только очень короткие временные ряды, и после кризиса 1998 года наблюдается только три крупных идентифицируемых спада. Тем не менее, некоторые переменные гораздо более персистентны. В [Приложении Г](#) показано разложение промышленного производства и безработицы на трендовые и циклические компоненты. Как видно, в динамике промышленного производства нет идентифицируемых циклов, кроме спада в 2008 году. Уровень безработицы также маловолатилен. Этот результат соответствует выводам о том, что уровень безработицы неэластичен по отношению к изменению заработной платы. Это могло привести к низкой волатильности уровня безработицы в

периоды спадов и подъемов, а также к неидентифицируемому изменению разрыва безработицы в периоды, близкие к кризису. Как следствие, к низкой точности прогнозирования.

Ежеквартальные данные. В случае ежеквартальных данных мы сталкиваемся с проблемой малой выборки: с 1-го квартала 1999 года доступно только 48 точек данных. Использовалась 32 точки для квартальных данных в тестовой выборке, что приводит к возникновению двух проблем. Во-первых, кризис 2008 года не входит в тестовую выборку (в отличие от ежемесячных данных). Во-вторых, в начале тестовой выборки включение большой длины лага приводит к чрезмерной аппроксимации модели. Для первых 10 точек тестовой выборки ограничил параметры длины лага ограниченными следующими значениями: ($p = 1, q = 0, R \leq 3$). Для всех остальных точек тестовой выборки были заданы ($p \leq 2; q \leq 3; R \leq 3$). Результаты прогнозирования представлены в [Таблице 3](#). Как видно, показатели разрыва реальных переменных повышают точность прогноза.

Таблица 3. Оценки среднеквадратической ошибки для моделей ежеквартальных данных.

	1 кв.	2 кв.	3 кв.	4 кв.	В ГОДОВОМ ИСЧИСЛЕНИИ
UCSV	1,556	1,562	1,599	1,739	5,030
UCSVMA	1,251	1,295	1,409	1,387	3,648
UCSVMAX	1,227	1,227	1,318	1,351	3,377
UCSVMAX BVM GDP	1,247	1,202	1,323	1,322	3,284
UCSVMAX BVM IPI	1,210	1,211	1,285	1,304	4,579
UCSVMAX BVM REAL INV	1,166	1,214	1,320	1,342	3,040
UCSVMAX BVM REAL IMP	1,220	1,240	1,328	1,388	5,245
UCSVMAX BVM REAL EXP	1,209	1,231	1,293	1,328	3,114
UCSVMAX BVM EMP	1,267	1,250	1,311	1,354	3,635
UCSVMAX BVM UNEMP	1,179	1,308	1,373	1,354	3,448
UCSVMAX DFM GDP	1,230	1,244	1,353	1,370	3,367
UCSVMAX DFM IPI	1,198	1,294	1,384	1,333	3,938
UCSVMAX DFM REAL INV	1,136	1,263	1,364	1,348	3,373
UCSVMAX DFM REAL IMP	1,210	1,290	1,373	1,323	3,806
UCSVMAX DFM REAL EXP	1,203	1,295	1,368	1,340	3,368
UCSVMAX DFM EMP	1,210	1,296	1,389	1,334	3,858
UCSVMAX DFM UNEMP	1,216	1,301	1,382	1,330	3,298
UCSVMAX DFM HIER GDP	1,288	1,293	1,270	1,202	4,089
UCSVMAX DFM BMA GDP	1,698	1,690	1,689	1,665	5,247

Как видно, модель DFM снижает точность прогноза по сравнению с моделью BVM. Точность прогнозирования занятости, ИПП и импорта с помощью спецификации DFM даже хуже результатов эталонной модели UCSVMAX. Это может быть связано либо с низкой волатильностью разрывов в начале тестовой выборки (как в случае ежемесячных данных), либо с чрезмерной аппроксимацией модели.

Если проблема действительно в переобучении, спецификации HIER и BMA должны помочь смягчить ее. Однако значения среднеквадратической ошибки для иерархической модели DFM не превосходят таковые для спецификаций BVM и DFM. Для спецификации BMA ситуация аналогична.

Тем не менее, в отличие от ежемесячных данных, разрывы реальных инвестиций и реального экспорта незначительно повышают точность прогнозирования ежеквартальных данных.

5. Проверка надежности: сравнение с фильтром Ходрика — Прескотта

Чтобы проверить надежность основного результата, разумно сравнить его с другими методами оценки разрывов реальных переменных.

Двумя известными альтернативами моделей ненаблюдаемых компонентов являются фильтры Ходрика — Прескотта и Гамильтона. Первый фильтр был раскритикован из-за трех основных недостатков (Hamilton, 2018):

1. Он основан на предположениях, которые не соблюдаются для процесса генерации данных.
2. Тренды, оцениваемые в конце выборки, отличаются от трендов в ее середине.
3. Стандартные процедуры поиска гиперпараметра сглаживания не основаны на статистических свойствах отфильтрованных рядов.

Гамильтон предложил другой фильтр на основе локальных проекций. Однако единого мнения в отношении выбора метода фильтрации при прогнозировании нет. Например, было доказано, что кредитные разрывы, отфильтрованные с помощью фильтра Ходрика — Прескотта, превосходят результаты применения фильтра Гамильтона по точности прогнозирования кризисов (Drehmann, Yetman, 2018).

Учитывая вышесказанное, сравнивались прогнозы, полученные на основе моделей UCSV, с прогнозами, основанными на разрывах, полученных с использованием фильтра Ходрика — Прескотта (HP). Чтобы решить первую проблему стандартного HP-фильтра, был оценён фильтр HP-AR, предложенный в работе (Grant, Chan, 2017c). Для прогнозирования разрывов используется стандартная авторегрессионная модель с выбором порядка лагов на основе показателя BIC в режиме реального времени. Среднеквадратические ошибки для этих моделей показаны в Таблице 2.

Чтобы адекватно сравнивать модель с фильтром HP со спецификацией UCSV DFM, были также включены первые главные компоненты всех разрывов, рассчитанные с помощью метода главных компонент, в уравнение инфляции UCSVMAX (спецификация UCSVMAX HP PCA).

Таблица 4. Оценки среднеквадратической ошибки для спецификации UCSVMAX с учетом разрывов с фильтром HP. Ежемесячные данные.

	1 МЕС	3 МЕС	6 МЕС	9 МЕС	12 МЕС	В ГОДОВОМ ИСЧИСЛЕНИИ
UCSVMAX HP IPI	0,351	0,420	0,426	0,438	0,466	3,678
UCSVMAX HP EXP	0,302	0,382	0,399	0,435	0,469	3,413
UCSVMAX HP IMP	0,328	0,435	0,442	0,453	0,484	3,841
UCSVMAX HP EMP	0,290	0,385	0,421	0,448	0,479	3,568
UCSVMAX HP CONSTR	0,308	0,384	0,402	0,423	0,452	3,260
UCSVMAX HP CARGO	0,318	0,407	0,423	0,449	0,480	3,638
UCSVMAX HP RETAIL	0,309	0,390	0,433	0,450	0,476	3,537
UCSVMAX HP BUSCONF	0,334	0,394	0,406	0,439	0,477	3,488
UCSVMAX HP UNEMP	0,307	0,401	0,433	0,453	0,479	3,683
UCSVMAX HP PCA	0,342	0,393	0,416	0,423	0,457	3,388

Как видно, точность прогноза трендов типа UCSV выше, чем трендов HP-фильтра. Более того, только разрыв реального экспорта, разрыв строительства и факторный разрыв, полученные с использованием PCA, дают прогнозы инфляции с более низкой среднеквадратичной ошибкой, чем у спецификации UCSVMAX. Это означает, что ни разрывы, заданные с помощью UCSV, ни разрывы, отфильтрованные с помощью алгоритма HP, не дают значительного повышения точности прогнозирования.

6. Достоверность измерений разрывов активности реального сектора

Еще одна проблема разложений на трендовые и циклические компоненты, упомянутая в работах (Orphanides, Norden, 2002) и (Jarocinsky, Lenza, 2018), связана с надежностью прогнозов

на один шаг вперед относительно разрывов реальных переменных или разрывов выпуска. В качестве индикатора инфляционного давления часто используются разрывы выпуска продукции и разрывы реальных переменных. Тем не менее, похоже, что для данных из США и ЕС пересмотры этого показателя приводят к изменениям, сопоставимым с величиной сглаженных оценок разрыва.

Этот же результат справедлив и для российской экономики. Чтобы проиллюстрировать этот тезис, я показываю оценки разрыва ИПП, разрыва экспорта и разрывы безработицы на основе спецификации DFM на рисунках 3–5. На рисунках сравниваются сглаженные оценки разрыва (черные линии) и прогноз на один месяц вперед (красные линии и серые заштрихованные области)¹¹.

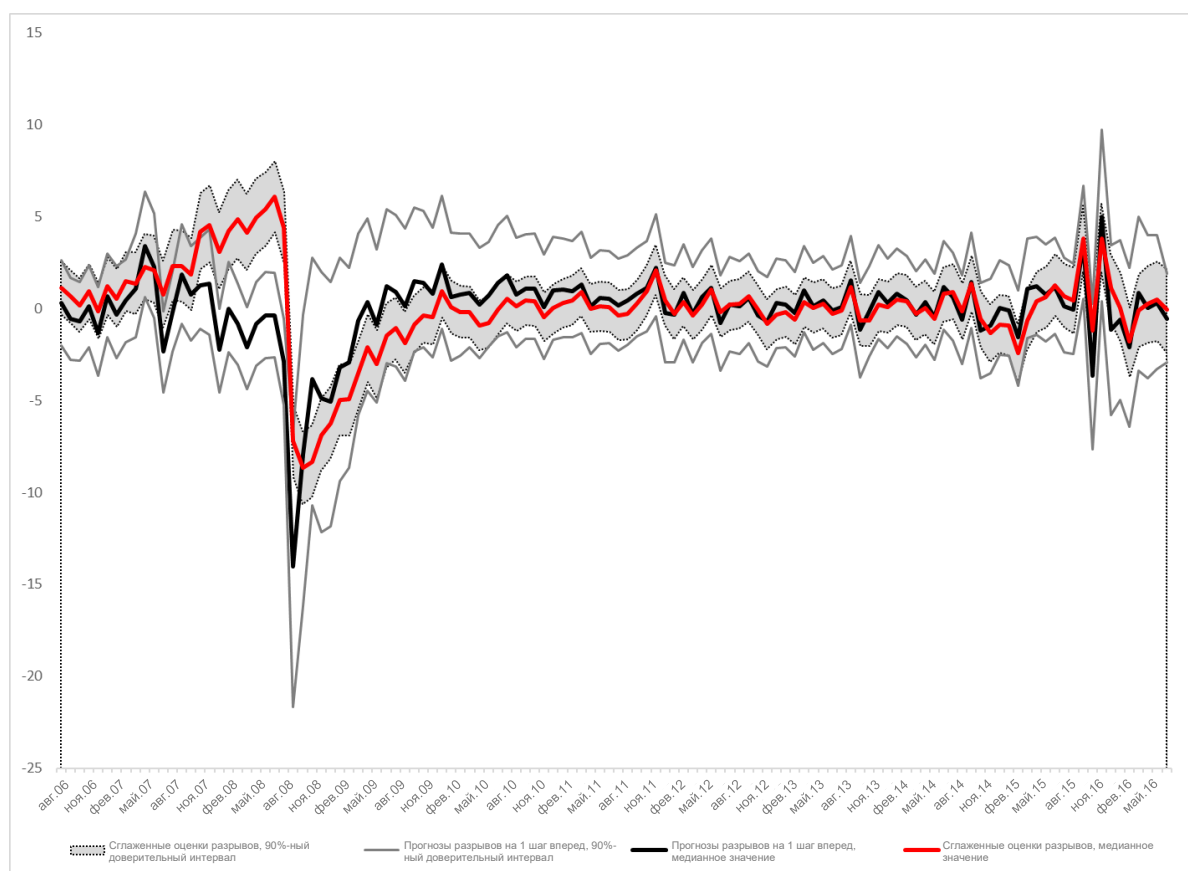
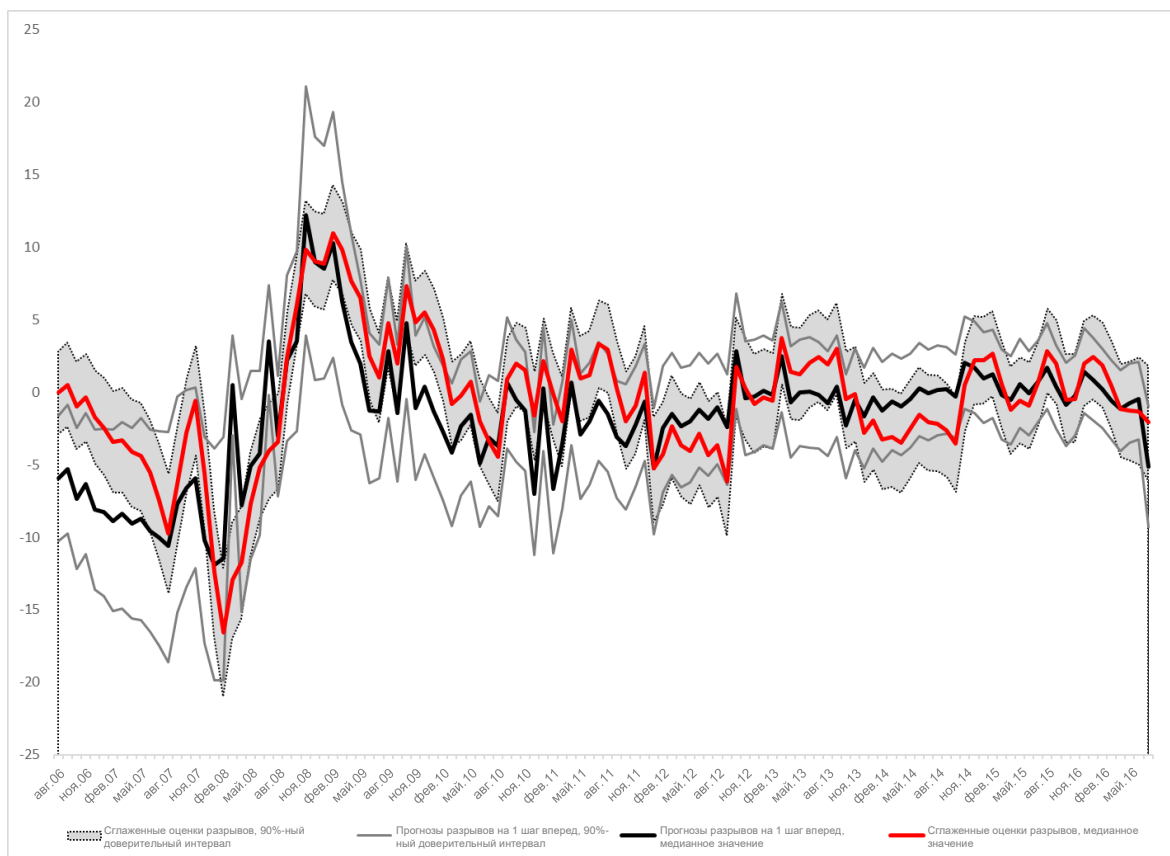
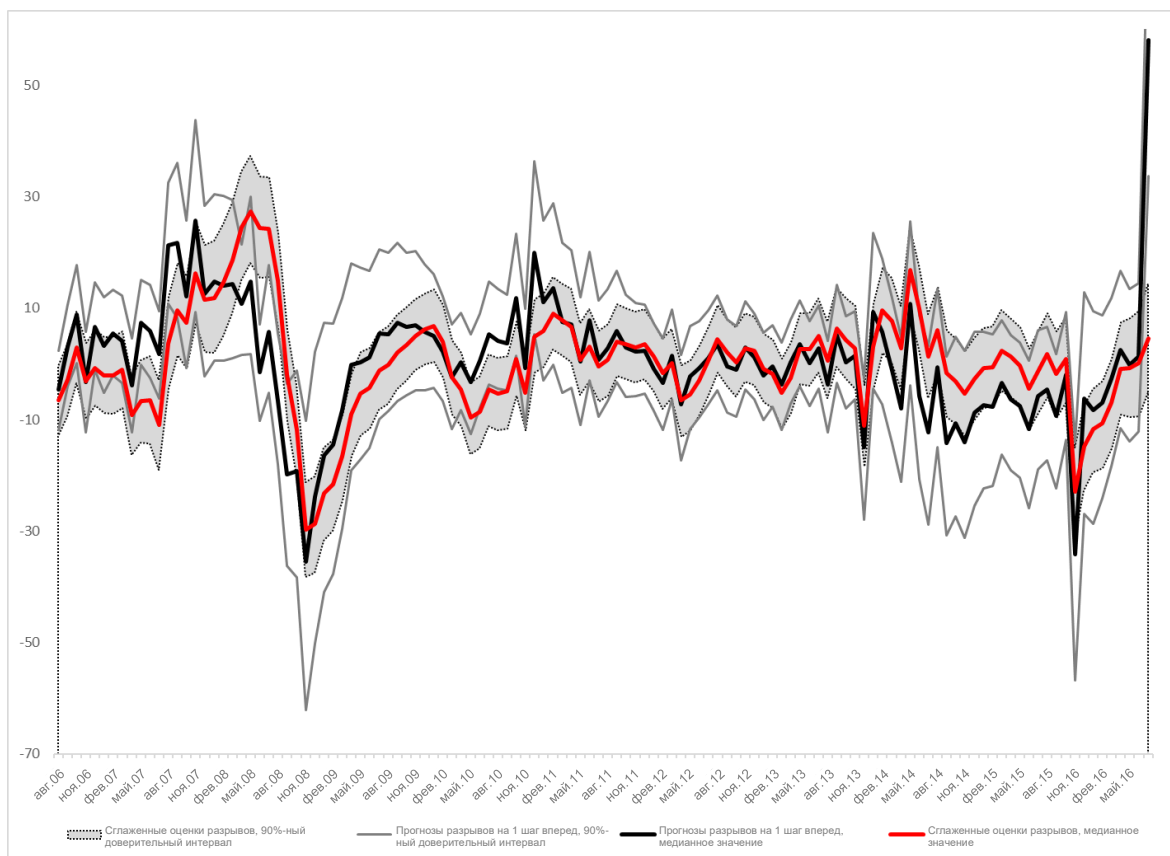


Рисунок 3. Разрыв ИПП, спецификация DFM. Сглаженные оценки разрывов и прогнозы разрывов на 1 шаг вперед

¹¹ Все представленные здесь разрывы приведены как процентные изменения от значений тренда.



Как видно, в конце выборки значения трендов сильно переоценены, особенно в момент кризиса 2008 года. Из рисунков видно, что сглаженные оценки не всегда лежат внутри доверительного интервала. Это может быть свидетельством существенной переоценки, а прогнозы инфляции могут быть предвзятыми.

Вторая проблема — пересмотры сглаженных переменных разрыва реальных переменных. На рисунках 6–8 показаны некоторые пересмотры разрыва. Сплошная красная линия показывает окончательные сглаженные оценки, а пунктирные линии — динамику сглаженных оценок в выборке для разрыва реальных переменных в каждой выборке в обучающем наборе. Как видно, величина изменений, возникающих при пересмотрах, высока, особенно в начале обучающей выборки. Это означает, что ни в один момент времени нельзя быть уверенным, что динамика разрывов реальных переменных не изменится после добавления новых точек данных.

Поэтому ни прогноз разрыва в реальном времени на шаг вперед, ни динамика разрыва в выборке не могут быть надежными для переменных, рассматриваемых в этой работе.

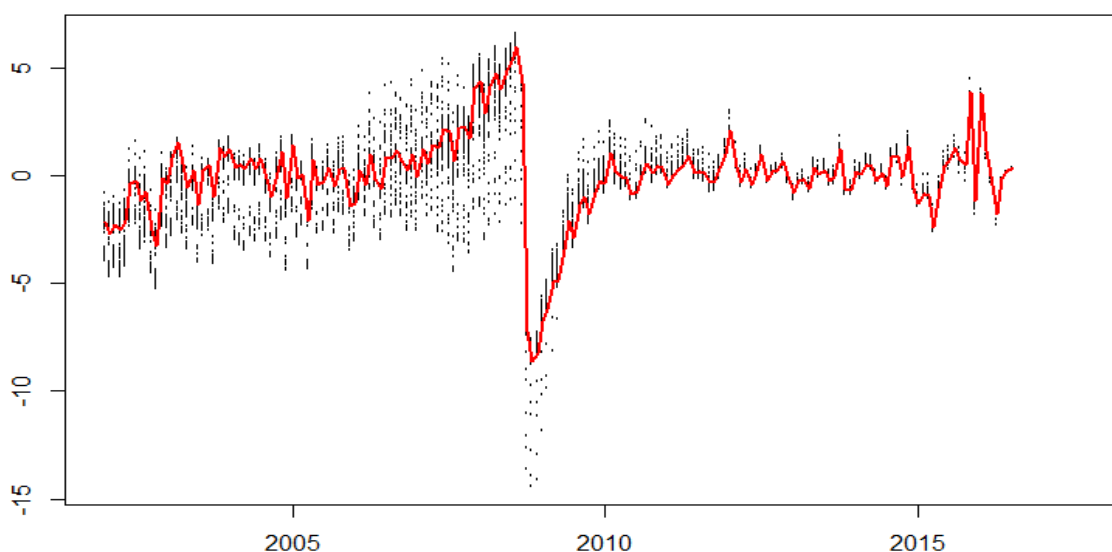


Рисунок 6. Изменения при пересмотре значений сглаженных разрывов промышленного производства, спецификация DFM. Красная линия относится к оценке полной выборки. Черные точки относятся к изменениям значений при рекурсивных пересмотрах в каждый момент времени.

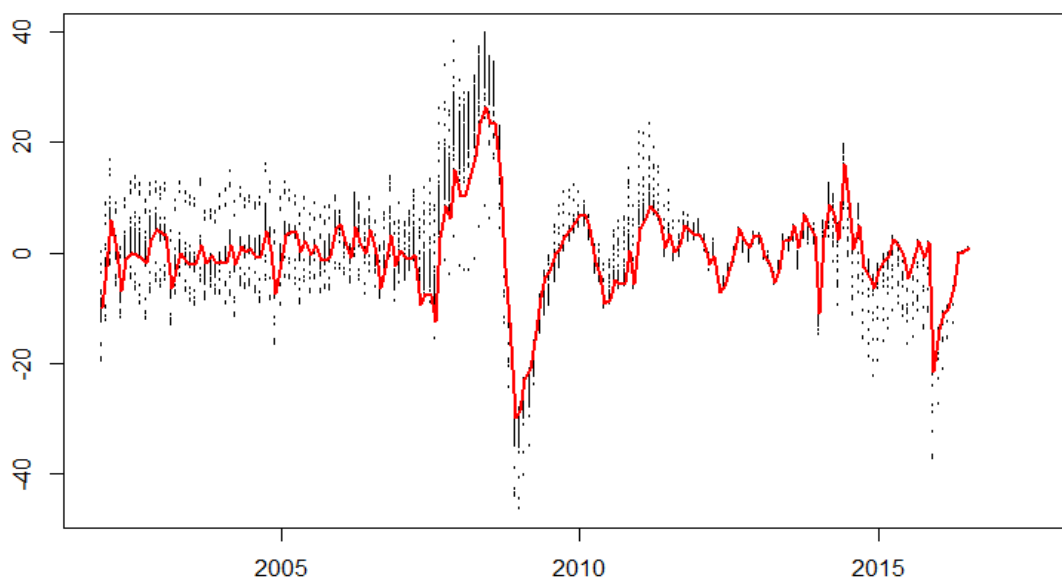


Рисунок 6. Изменения при пересмотре значений сглаженных разрывов реального экспорта, спецификация DFM. Красная линия относится к оценке полной выборки. Черные точки относятся к изменениям значений при рекурсивных пересмотрах в каждый момент времени.

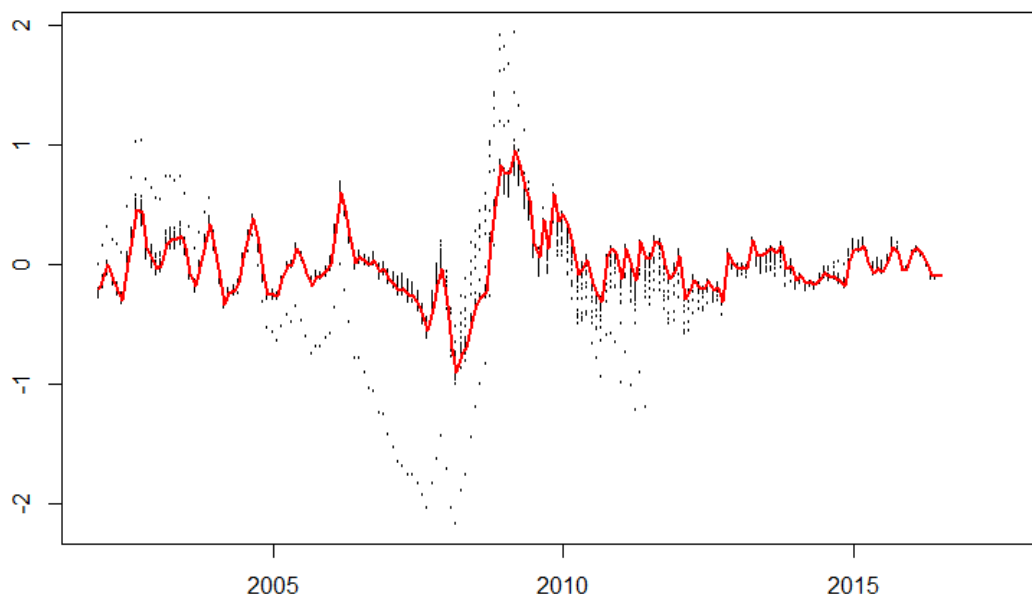


Рисунок 8. Изменения при пересмотре значений сглаженных показателей разрыва безработицы, спецификация DFM. Красная линия относится к оценке полной выборки. Черные точки относятся к изменениям значений при рекурсивных пересмотрах в каждый момент времени.

Еще одна проблема связана с интерпретацией связей между оценками разрыва выпуска и соответствующими прогнозами инфляции. Обычно считается, что чем выше разрыв выпуска, тем выше прогноз инфляции. Это может быть справедливо, если сравнивать показатель разрыва для той же спецификации модели. Однако, если сравнивать показатели разрыва для разных моделей, это не так. Чтобы продемонстрировать этот факт, сравним спецификацию DFM с соответствующей спецификацией BVM для каждой из эталонных переменных. Для каждой из эталонных переменных рассчитывается разница в прогнозах инфляции на один шаг вперед между спецификациями DFM и BVM и разница в прогнозах разрыва на один шаг вперед между спецификациями.

Наиболее противоречивые результаты получены для показателей занятости и индекса реальных тарифов на грузовые перевозки. Результаты для обеих переменных показаны на рисунках 9 и 10.

Несмотря на наличие явных выбросов, в обоих случаях корреляция между прогнозом и разницей в разрывах является отрицательной (в случае занятости корреляция незначительна). Этот факт противоречит обычному подходу к интерпретации для таких типов моделей: модель с более высоким разрывом не дает более высоких прогнозов инфляции. Это может быть связано с тем, что различия в спецификациях моделей приводят не только к изменению оценок разрывов, но и к изменению апостериорных распределений параметров. Это приводит к отсутствию положительной зависимости между этими двумя показателями.

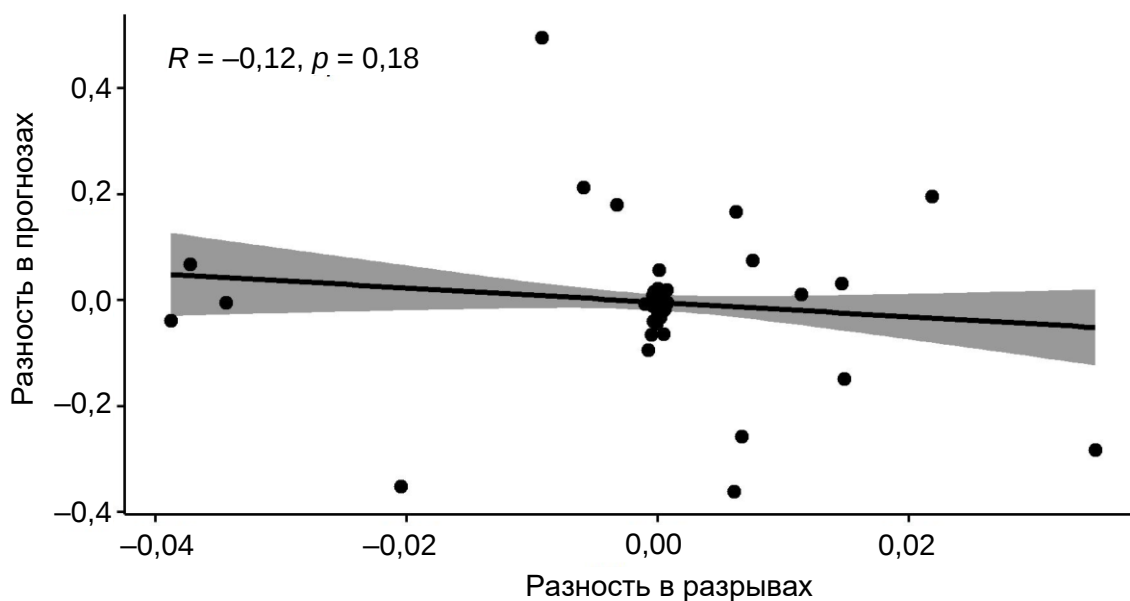


Рисунок 9. Корреляция между различиями в разрывах и прогнозами инфляции между спецификациями DFM и BVM. Эталонная переменная — занятость.

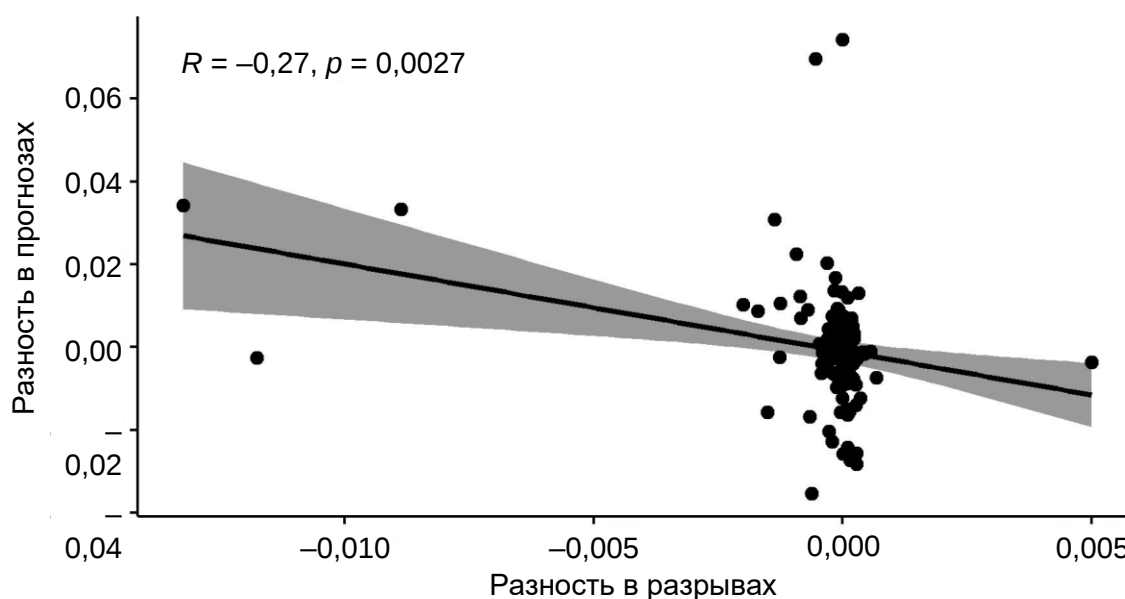


Рисунок 10. Корреляция между различиями в разрывах и прогнозами инфляции между спецификациями DFM и BVM. Эталонная переменная — занятость.

7. Заключение

В рамках данной работы были оценены показатели разрывов реальных переменных России на основе модели ненаблюдаемых компонент. Показано, что в рассмотренных спецификациях эти показатели не помогают улучшить прогнозы инфляции. Кроме того, величина изменений, возникающих при пересмотрах, значимо высока, что свидетельствует о ненадежности оценок таких показателей в реальном времени. Этот результат соответствует данным из США (Orphanides, Norden, 2002). Двумерные, трехмерные модели и модели, в которых цены на нефть влияют на тренды, также не помогают повысить точность прогнозирования. Это можно объяснить несколькими фактами. Во-первых, количество циклов переменных реальной активности в Российской

Федерации за рассматриваемый период слишком мало. Во-вторых, характер недавних кризисов в России отличается от кризиса 2008 года. Поэтому затруднительно прогнозировать кризис 2014 года в режиме реального времени, опираясь на информацию о кризисе 2008 года. В-третьих, инфляция в России может характеризоваться несколькими структурными сдвигами, которые могут повлиять на оценки параметров и, как следствие, на точность прогнозирования всей модели.

В данной работе было продемонстрировано, что показатели разрывов реальных переменных подвергаются значительным пересмотрам как внутри выборки, так и за пределами выборки. Наличие пересмотренных данных указывает на то, что величина изменений при пересмотрах могла быть намного выше. Однако продолжительной истории этих изменений при пересмотрах на момент написания работы отсутствовало. По этой причине проверить эту гипотезу невозможно.

Список литературы

- Basistha, A., & Nelson, C. R. (2007). New measures of the output gap based on the forward-looking new Keynesian Phillips curve. *Journal of Monetary Economics*, 54(2), 498-511.
- Basistha, A. (2007). Trend-cycle correlation, drift break and the estimation of trend and cycle in Canadian GDP. *Canadian Journal of Economics/Revue canadienne d'économique*, 40(2), 584-606.
- Benes, J., & N'Diaye, P. M. B. (2004). *A Multivariate Filter for Measuring Potential Output and the NAIRU Application to the Czech Republic* (No. 4-45). International Monetary Fund.
- Berger, T., & Kempa, B. (2011). Bayesian estimation of the output gap for a small open economy: The case of Canada. *Economics Letters*, 112(1), 107-112.
- Carter, C. K., & Kohn, R. (1994). On Gibbs sampling for state space models. *Biometrika*, 81(3), 541-553.
- Chan, J. C., & Jeliaskov, I. (2009). Efficient simulation and integrated likelihood estimation in state space models. *International Journal of Mathematical Modelling and Numerical Optimisation*, 1(1-2), 101-120.
- Chan, J. C. (2013). Moving average stochastic volatility models with application to inflation forecast. *Journal of Econometrics*, 176(2), 162-172.
- Chan, J. C., & Grant, A. L. (2016). Fast computation of the deviance information criterion for latent variable models. *Computational Statistics & Data Analysis*, 100, 847-859.
- Chan, J. C. (2018). Specification tests for time-varying parameter models with stochastic volatility. *Econometric Reviews*, 37(8), 807-823.
- Clark, Peter K. (1987); "The Cyclical Component of US Economic Activity", *Quarterly Journal of Economics*, 102, 797-814.
- Coibion, O., & Gorodnichenko, Y. (2015). Is the Phillips curve alive and well after all? Inflation expectations and the missing disinflation. *American Economic Journal: Macroeconomics*, 7(1), 197-232.
- Diebold, F. X. and Mariano, R. S. (1995). *Comparing Predictive Accuracy*. *Journal of Business & Economic Statistics*, 13(3):253.
- Durbin, J., & Koopman, S. J. (2002). *Time series analysis by state space methods*. Oxford university press.
- Giordani, P., & Kohn, R. (2010). Adaptive independent Metropolis-Hastings by fast estimation of mixtures of normals. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 19(2), 243-259.
- Grant, A. L., & Chan, J. C. (2017a). A Bayesian Model Comparison for Trend-Cycle Decompositions of Output. *Journal of Money, Credit and Banking*, 49(2-3), 525-552.
- Grant, A., & Chan, J. C. (2017b). Measuring the output gap using stochastic model specification search.
- Grant, A. L., & Chan, J. C. (2017c). Reconciling output gaps: Unobserved components model and Hodrick-Prescott filter. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 75, 114-121.
- Harvey, A. C. (1985); "Trends and Cycles in Macroeconomic Time Series", *Journal of Business and Economic Statistics*, 3, 216-27
- Harvey, A. C., Trimbur, T. M., & Van Dijk, H. K. (2007). Trends and cycles in economic time series: A Bayesian approach. *Journal of Econometrics*, 140(2), 618-649.

- Jarociński, M., & Lenza, M. (2018). An inflation-predicting measure of the output gap in the euro area. *Journal of Money, Credit and Banking*, 50(6), 1189–1224.
- Kim, S., Shephard, N., & Chib, S. (1998). Stochastic volatility: likelihood inference and comparison with ARCH models. *The review of economic studies*, 65(3), 361–393.
- Kloudova, D. (2015). Estimating output gap and potential output for Russia and its usefulness by forecasting inflation. *International Journal of Economic Sciences*, 4(1), 45–59.
- Korobilis, D. (2013). Hierarchical shrinkage priors for dynamic regressions with many predictors. *International Journal of Forecasting*, 29(1), 43–59.
- Kuttner, K. N. (1994). Estimating potential output as a latent variable. *Journal of business & economic statistics*, 12(3), 361–368.
- Marcellino, M., & Musso, A. (2011). The reliability of real-time estimates of the euro area output gap. *Economic Modelling*, 28(4), 1842–1856.
- Morley, J. C., Nelson, C. R., & Zivot, E. (2003). Why are the Beveridge-Nelson and unobserved-components decompositions of GDP so different?. *Review of Economics and Statistics*, 85(2), 235–243.
- Li M. & Mendieta-Muñoz, I. (2019, forthcoming) Identifying interactions between permanent and transitory shocks via multivariate simultaneous unobserved components models with heteroskedasticity
- Neal, R. M. (2011). MCMC using Hamiltonian dynamics. *Handbook of markov chain monte carlo*, 2(11), 2.
- Orphanides, A., & Norden, S. V. (2002). The unreliability of output-gap estimates in real time. *Review of economics and statistics*, 84(4), 569–583.
- Planas, C., & Rossi, A. (2004). Can inflation data improve the real-time reliability of output gap estimates?. *Journal of Applied Econometrics*, 19(1), 121–133.
- Planas, C., Rossi, A., & Fiorentini, G. (2008). Bayesian analysis of the output gap. *Journal of Business & Economic Statistics*, 26(1), 18–32.
- A. В. Полбин (2019). Оценка компонента бизнес-цикла российского ВВП с моделью ненаблюдаемых компонентов в условиях высокой зависимости от условий торговли.
- Sala-i-Martin, X., Doppelhofer, G., & Miller, R. I. (2004). Determinants of long-term growth: A Bayesian averaging of classical estimates (BACE) approach. *American economic review*, 813–835.
- Sinclair, T. M. (2009). The relationships between permanent and transitory movements in US output and the unemployment rate. *Journal of Money, Credit and Banking*, 41(2-3), 529–542.
- Stock, J. H., & Watson, M. W. (2007). Why has US inflation become harder to forecast?. *Journal of Money, Credit and banking*, 39, 3–33.
- Zubarev, A. V., & Trunin, P. V. (2017). The analysis of the dynamics of the Russian economy using the output gap indicator. *Studies on Russian Economic Development*, 28(2), 126–132.

А. Данные, априорные распределения и инициализация**А.1. Источники данных****Ежемесячные данные**

РЯДЫ	ДОСТУПНЫЙ ПЕРИОД	ПРЕОБРАЗОВАНИЕ	ИСТОЧНИК
Индекс промышленного производства, y_t^0 (ИПП)	2003M1:2018M9	Логарифмическое, SA	CEIC
Инфляция, π_t	2003M1:2018M9	SA, $100 \times$ логарифмическая разность	Росстат
Инфляционные ожидания, π_t^e (инФОМ)	20011Q1:2104Q1; 2014M3:2018M9		инФОМ
Реальный экспорт (EXP), долл. США	2003M1:2018M9	Логарифмическое, SA	CEIC
Реальный импорт (IMP), долл. США	2003M1:2018M9	Логарифмическое, SA	CEIC
Строительство (CONSTR)	2003M1:2018M9	Логарифмическое, SA	CEIC
Грузоперевозки (CARGO)	2003M1:2018M9	Логарифмическое, SA	CEIC
Розничная торговля; (RETAIL) Розничная торговля (продовольственные товары); Розничная торговля (непродовольственные товары)	2003M1:2018M9	Логарифмическое, SA	CEIC
Деловая уверенность (BUSCONF)	2003M1:2018M9	Логарифмическое, SA	База данных OECD
Общая занятость по профессиональному статусу (EMP)	2003M1:2018M9	Логарифмическое, SA	База данных OECD
Уровень безработицы (UNEMP)	2003M1:2018M9	—	Росстат
Цены на нефть	2003M1:2018M9	Логарифмическая разница, SA	Банк России
Эффективный валютный курс по расширенному набору данных	2003M1:2018M9	Логарифмическая разница, SA	Банк России

Ежеквартальные данные

РЯДЫ	ДОСТУПНЫЙ ПЕРИОД	ПРЕОБРАЗОВАНИЕ	ИСТОЧНИК
Реальный ВВП, y_t^0 (GDP)	1999Q1:2018Q4	Логарифмическое, SA	Росстат
Инфляция, π_t	1999Q1:2018Q4	SA, $100 \times$ логарифмическая разность	Росстат
Консенсус-прогноз инфляции, π_t^e	2008Q1:2018Q4		Bloomberg
Реальные инвестиции (INV)	1999Q1:2018Q4	Логарифмическое, SA	Росстат
Реальный импорт (IMP)	1999Q1:2018Q4	Логарифмическое, SA	Росстат
Реальный экспорт (EXP)	1999Q1:2018Q4	Логарифмическое, SA	Росстат
Промышленное производство (ИПП)	1999Q1:2018Q4	Логарифмическое, SA	Росстат
Деловая уверенность (BUSCONF)	1999Q1:2018Q4	Логарифмическое, SA	База данных OECD
Общая занятость по профессиональному статусу (EMP)	1999Q1:2018Q4	Логарифмическое, SA	База данных OECD
Уровень безработицы (UNEMP)	1999Q1:2018Q4	—	Росстат
Цены на нефть	1999Q1:2018Q4	Логарифмическая разница, SA	Банк России
Цены на газ	1999Q1:2018Q4	Логарифмическая разница, SA	Банк России
Эффективный номинальный валютный курс по расширенному набору данных	1999Q1:2018Q4	Логарифмическая разница, SA	Банк России

А.2. Необходимость оценки стохастической волатильности

Чтобы проверить предположение о включении стохастической волатильности для модели пространства состояний для оценки инфляции, используется байесовское сравнение моделей на основе байесовского сравнения логарифмических факторов и метода аппроксимации из работы (Chan, 2018). Логарифмический байесовский фактор для сравнения моделей M_1 и M_2 :

$$\log(BF_{12}) = \log(p(M_1|D, \psi_1)) - \log(p(M_2|D, \psi_2)),$$

где $p(M_i|D, \psi_i) = \int p(M_i|D, \theta_i, \psi_i) d\theta_i$ — предельное правдоподобие, θ_i — параметры M_i -й модели, ψ_i — априорные гиперпараметры.

Чем выше логарифмический байесовский фактор, тем более вероятна модель 1 по сравнению с моделью 2. Использовалась стандартная спецификация модели Стока — Уотсона UCSV со стохастической волатильностью как по тренду, так и по циклу для инфляции. Это модель M_1 в нотации BF_{12} . Эта модель сравнивалась с моделью с постоянной дисперсией только тренда, постоянной дисперсией только цикла и постоянной дисперсией тренда и цикла. Результаты представлены в Таблице 5.

Таблица 5. Байесовские факторы для различных спецификаций стандартной модели UCSV для инфляции.

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ БАЙЕСОВСКИЙ ФАКТОР В СРАВНЕНИИ С МОДЕЛЬЮ UCSV (ОЦЕНКА СТАНДАРТНОЙ ОШИБКИ ЛОГАРИФМА БАЙЕСОВСКОГО ФАКТОРА)	h_t^π - КОНСТАНТА	q_t^π - КОНСТАНТА	ОБЕ ДИСПЕРСИИ ЯВЛЯЮТСЯ КОНСТАНТАМИ
Ежеквартальные данные	9,0 (8,52)	0,0 (0,30)	171 (3,97)
Ежемесячные данные	3,0 (0,22)	1,5 (0,15)	221,3 (4,20)

Как видно, для модели UCSV более вероятна модель UC без изменяющейся во времени дисперсии как тренда, так и цикла. С другой стороны, в классификации Джеффри ([Zellner, 1989](#)) модель UCSV намного предпочтительнее модели с постоянной дисперсией h_t^π . С другой стороны, модель UCSV и модель с постоянной q_t^π эквивалентны с точки зрения байесовского фактора.

В литературе по ВМА (см., например, [Sala-i-Martin, et al, 2004](#)) вместо выбора модели теоретически более уместно использовать эти байесовские факторы для усреднения моделей. То есть сначала вычислить апостериорные вероятности моделей, а затем вычислить средневзвешенное значение интересующего параметра с весами, пропорциональными апостериорным вероятностям моделей. Однако, учитывая большое количество спецификаций моделей, в этой работе сосредоточимся на стандартной спецификации UCSV с меняющимися во времени трендами и циклами.

Расчетные дисперсии, изменяющиеся в полулогарифмическом масштабе, показаны на Рисунке 8.

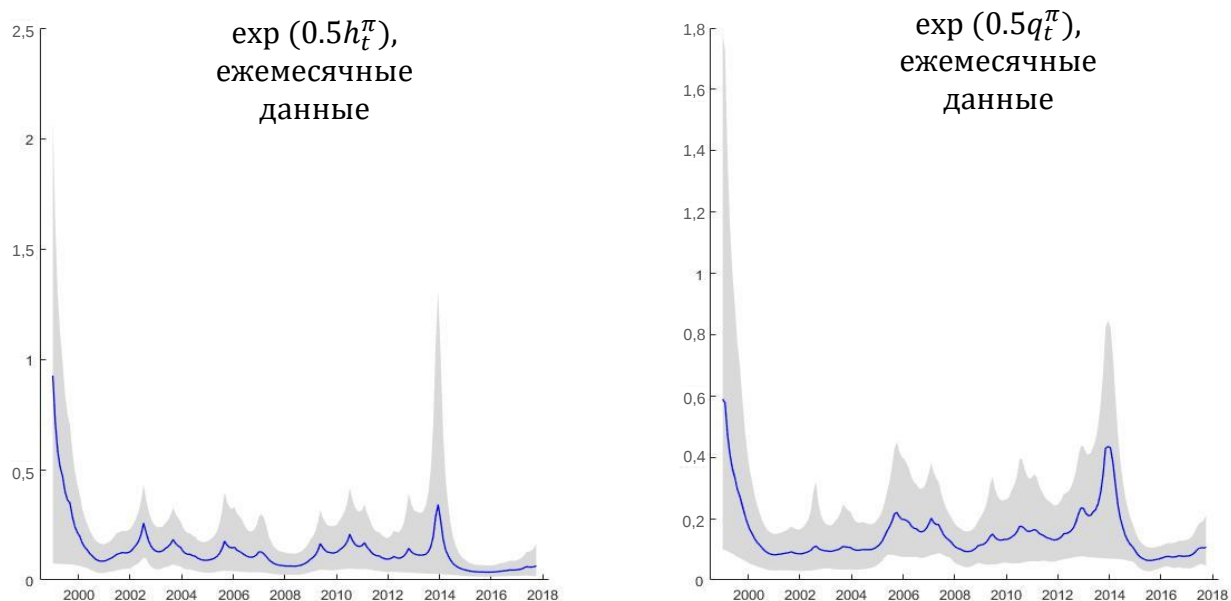


Рисунок 7. Изменяющийся во времени логарифмический тренд инфляции (справа) и разрыв (слева) для модели UCSV. Ежемесячные данные.

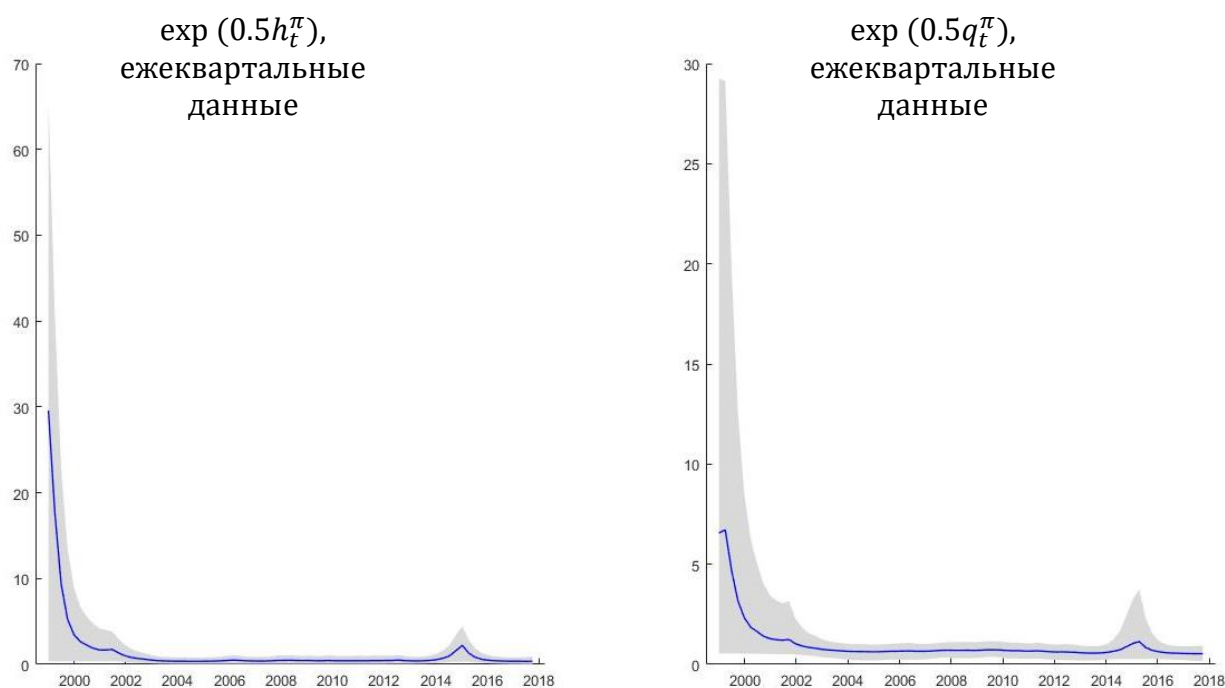


Рисунок 8. Изменяющийся во времени логарифмический тренд инфляции (справа) и разрыв (слева) для модели UCSV. Ежеквартальные данные.

А.3. Априорные распределения и инициализация

Параметры авторегрессионного процесса для анализа разрывов. Подобно модели в работе Planas, et al, 2008, параметры для авторегрессионного процесса определены с помощью параметров (A, ω) (см. уравнения 7а–7б). Параметр ω обозначает периодичность циклов, а параметр A отражает персистентность разрыва. Значения (A, ω) ограничены и лежат в диапазоне от (L_A, L_ω) до (H_A, H_ω) . Оба гиперпараметра имеют априорное бета-распределение:

$$\frac{A-L_A}{H_A-L_A} \sim \text{Beta}(\bar{\alpha}_A, \bar{\beta}_A); \quad \frac{\omega-L_\omega}{H_\omega-L_\omega} \sim \text{Beta}(\bar{\alpha}_\omega, \bar{\beta}_\omega)$$

Для обоих наборов данных выбираются априорные средние значения (m_A, m_ω) и дисперсии ($\sigma_A^2, \sigma_\omega^2$) обоих параметров и вычисляются априорные гиперпараметры бета-распределения, используя следующие формулы:

$$\bar{\alpha}_s = Sh_s \times \bar{\beta}_s; \quad Sh_s = (m_s - L_s)(H_s - m_s)^{-1}; \quad \bar{\beta}_s = (1 - Sh_s \times \sigma_s^2)(\sigma_s^2(1 + Sh_s) \times Sh_s)^{-1}$$

Как для ежемесячных, так и для ежеквартальных наборов данных зададим $L_A = 0; H_A = 1$, со средним $m_A = 0.5$ и дисперсией $\sigma_A^2 = 0.1$. Опираясь на подход, описанный в работе [Jarocinsky, Lenza, 2018](#), для ежеквартальных данных были выбраны границы для параметра периодичности равными $(L_\omega, H_\omega)^{quarter} = (10, 50)$ со средним значением $m_\omega^{quarter} = 32$. Это означает, что в среднем каждый цикл имеет периодичность 32 квартала. Соответственно, для месячных данных $(L_\omega, H_\omega)^{month} = (30, 150)$ и $m_\omega^{month} = 96$.

Матрицы нагрузок и параметры инфляции. Из-за коротких временных рядов, в отличие от [Jarocinsky, Lenza, 2018](#), использовались три дополнительных определения априорных ковариационных матриц. Во-первых, в стандартном случае без регуляризации было задано стандартное априорное распределение типа Миннесота. Дисперсия нагрузочного параметра для l -го лага ($l = 0, 1, \dots, R$) разрыва для j -й переменной задается как: $\sigma_j^2 \sigma_0^{-2} W_{tight}^B (W_{lag}^B)^{-l}$. σ_0^2 — дисперсия эталонной переменной, σ_j^2 — дисперсия j -й реальной переменной, W_{tight}^B — плотность априорного гиперпараметра, W_{lag}^B — параметр плотности лага.

Для параметров уравнения инфляции $\theta^{infl} = [\lambda, \beta]$ априорная дисперсия для j -го параметра равна $\sigma_j^2 \sigma_0^{-2} W_{exog}^{infl} W_{tight}^{infl} (W_{lag}^{infl})^{-l}$. Аналогичным образом, W_{tight}^{infl} — плотность априорного гиперпараметра, W_{lag}^{infl} — параметр плотности лага, W_{exog}^{infl} — параметр диффузии экзогенных переменных (для разрыва и лагов разрыва он равен 1).

Априорные средние значения для всех параметров равны нулю.

Матрица нагрузки инициализируется как матрица коэффициентов VAR для первых разностей всех реальных переменных, включенных в спецификацию DFM. Коэффициенты уравнения инфляции инициализируются с использованием стандартной спецификации ARIMAX с разрывами, равными первым разностям эталонной переменной.

Дисперсии трендов и разрывов. Следуя алгоритмам, предложенным в работе [Jarocinsky, Lenza, 2018](#), для каждой реальной переменной $n = 0 \dots N$ дисперсии тренда и цикла равны $0.25 \times \text{var}(\Delta y_t^n)$, где Δy_t^n — первая разность. Априорные дисперсии тренда и разрыва вычисляются так же.

Априорные значения для первого тренда равны первым значениям самой реальной переменной. Априорная дисперсия для первых значений тренда μ_0^n и цикла $g_0^n = (y_0^n - \mu_0^n)$ в 10 раз больше соответствующей общей дисперсии «тренд — цикл». Начальные значения тренда и разрыва для $t = 1 \dots T$ равны разложению Ходрика — Прескотта с параметрами сглаживания 14 400 для ежемесячных и 1600 для ежеквартальных данных.

В. Описание процедуры оценки

В этом приложении рассматривается процедура оценивания. Все выводы выполнены на расчетах для спецификации DFM UCSVMAX. UCSVMA, UCSVMAX, BVM UCSVMAX и DFM UCSVMA представляют собой частные случаи этой модели с ограничениями.

Все расчеты основаны на работе (Chan, Jeliazkov, 2009). Прежде чем продолжить, необходимо ввести несколько определений. Во-первых, все полиномы лагов представим в виде матриц Тёплица. Чтобы этого добиться, для некоторой переменной $x = [x_0, x_1, \dots, x_T]'$ авторегрессионный процесс вида $x_t = \sum_{j=1}^p \rho_j^x x_{t-j} + \varepsilon_t$ может быть представлен в виде $H_\rho^x x = \varepsilon$, где H_ρ^x — матрица Тёплица, которая заполнена нулями ниже главной диагонали и единицами на главной диагонали, на j -й верхней диагонали расположены значения $-\rho_j^x$, а все остальные значения в матрице равны нулю. Определяем операцию построения таких матриц, как $H_v = TM(v)$, где H_v — матрица Тёплица с элементом v_j на j -м элементе выше главной диагонали (включая главную диагональ):

$$H_v = TM(v) = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & \dots & v_k \\ 0 & v_1 & v_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & v_1 & v_2 & v_3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_1 \end{bmatrix}$$

Определим:

$H = TM([1, -1, \mathbf{0}_{T-3}])$	$H_\varphi = TM([1, -\varphi', \mathbf{0}_{T-q-1}])$	$H_\lambda = TM([\lambda', \mathbf{0}_{T-r-1}])$
$H_\rho = TM([1, -\rho_\pi', \mathbf{0}_{T-p-1}])$	$H_g = TM([1, -\rho_g', \mathbf{0}_{T-q-1}])$	$H_B^n = TM([(B^n)', \mathbf{0}_{T-r-1}])$

Все ковариационные матрицы диагональны. Тем не менее, некоторые отклонения характеризуются изменяющимися во времени дисперсиями. Ковариационные матрицы для уравнения наблюдаемых переменных и матрицы для уравнений состояния определим следующим образом:

$S_j = \text{diag}(\exp(h_j)), j = 0..N$	$D_j = \text{diag}(\sigma_j^2 \times i_T) + I_T(1,1)W_{\mu j},$ $j = 1..N$	$D_{\pi^e} = \text{diag}(\sigma_{\pi^e}^2 \times i_T) + I_T(1,1)W_{\pi^e}$
$S_\pi = \text{diag}(\exp(2 \times h_\pi))$	$D_\pi = \text{diag}(\exp(q_\pi)) + I_T(1,1)W_\pi$	$S_{ek} = \text{diag}(\sigma_{ek}^2 \times i_T)$

Здесь $I_T(1,1)$ — нулевая матрица $T \times T$ с элементом (1,1), равным 1, $W_{\mu j}$ — априорная дисперсия начального значения тренда j -й реальной переменной, W_π — априорная дисперсия начального значения тренда инфляции, W_{π^e} — априорная дисперсия начального значения тренда инфляционных ожиданий.

Опираясь на работу (Chan, Jeliazkov, 2017), для оценки моделей используются алгоритмы для разреженных матриц в MATLAB.

Полное апостериорное распределение для модели DFM UCSVMAX может быть записано следующим образом (где θ — вектор всех параметров модели, Y — эндогенные переменные, X — экзогенные переменные):

$$p(\theta, h, Y|X, \psi) \propto \exp(-0.5 \times (P + E)),$$

Ядро логарифма правдоподобия:

$$E = (y_0 - \mu_0)' H_g' S_o^{-1} H_g (y_0 - \mu_0) + \sum_{j=1}^n (y_j - \mu_j - H_{Bj}(y_0 - \mu_0))' S_j^{-1} (y_j - \mu_j - H_{Bj}(y_0 - \mu_0))$$

$$\begin{aligned}
& + (\hat{\pi} - \tilde{\pi} - H_{\kappa}^0 \tilde{\pi}^e - H_{\lambda}(y_0 - \mu_0))' H_{\varphi}' S_{\pi}^{-1} H_{\varphi} (\hat{\pi} - \tilde{\pi} - H_{\kappa}^0 \tilde{\pi}^e - H_{\lambda}(y_0 - \mu_0)) \\
& + \sum_{k=1}^K (\widehat{\pi}_k^e - \kappa_k \tilde{\pi}^e)' S_{ek}^{-1} (\widehat{\pi}_k^e - \kappa_k \tilde{\pi}^e) \\
& + (H_{\alpha 1} \mu_0 - H_{\alpha 2} \tilde{\mu}_0)' D_0^{-1} (H_{\alpha 1} \mu_0 - H_{\alpha 2} \tilde{\mu}_0) + \sum_{j=1}^n (H_{\alpha 1} \mu_j - H_{\alpha 2} \tilde{\mu}_j)' D_j^{-1} (H_{\alpha 1} \mu_j - H_{\alpha 2} \tilde{\mu}_j) + \tilde{\pi}' H_{\rho}' D_{\pi}^{-1} H_{\rho} \tilde{\pi} \\
& + \tilde{\pi}^e' H' D_{\pi^e}^{-1} H \tilde{\pi}^e,
\end{aligned}$$

где $\hat{\pi} = \pi - X\beta$. Совместная плотность распределения для каждой из моделей в подразделе 3.1 может быть представлена формулой выше. Для спецификации тренда LLT $H_{\alpha 1} = H^2$, $H_{\alpha 2} = H$, $\tilde{\mu}_0 = e_T^1 \mu_{00}$; для спецификации тренда RWD $H_{\alpha 1} = H$, $H_{\alpha 2} = I_T$, $\tilde{\mu}_0 = e_T^1 \mu_{00} + i_T \alpha$; и, наконец, для спецификации тренда RW: $H_{\alpha 1} = H$, $H_{\alpha 2} = I_T$, $\tilde{\mu}_0 = e_T^1 \mu_{00}$.

Ядра априорных распределений параметров:

$$\begin{aligned}
P = & \beta' W_{\beta}^{-1} \beta + \sum_{n=1}^N B_n' W_{Bn}^{-1} B_n - 2 \ln \left(p_{Beta} \left(\frac{A - L_A}{H_A - L_A}, \tilde{\alpha}_A, \tilde{\beta}_A \right) \right) - 2 \ln \left(p_{Beta} \left(\frac{\omega - L_{\omega}}{H_{\omega} - L_{\omega}}, \tilde{\alpha}_{\omega}, \tilde{\beta}_{\omega} \right) \right) \\
& + \sum_{s=0}^K \kappa_s' W_{\kappa}^{-1} \kappa_s + \lambda' W_{\lambda}^{-1} \lambda + \varphi' W_{\varphi}^{-1} \varphi + \rho_{\pi}' W_{\rho\pi}^{-1} \rho_{\pi} + \rho_g' W_{\rho g}^{-1} \rho_g
\end{aligned}$$

где W_s — априорная ковариационная матрица. Поиск априорных гиперпараметров обсуждается в предыдущем разделе приложения.

Генератор выборки Гиббса работает следующим образом:

1. Семплирование $\tilde{\pi}, \tilde{\pi}_k^e | \{\mu_k\}_{k=0}^N, \theta_{par}, \rho_g, h_{1:T}, \sigma^2$
2. Семплирование $\mu_0 | \tilde{\pi}, \tilde{\pi}_k^e, \{\mu_k\}_{k=0}^N, \theta_{par}, \rho_g, h_{1:T}, \sigma^2$
3. Семплирование $\mu_n | \tilde{\pi}, \tilde{\pi}_k^e, \{\mu_k\}_{k=0; k \neq n}^N, \theta_{par}, \rho_g, h_{1:T}, \sigma^2$
4. Семплирование $\theta_{par} = (\varphi, \beta, \lambda, B, \rho_{\pi}, \kappa) | \tilde{\pi}, \tilde{\pi}_k^e, \{\mu_k\}_{k=0}^N, \rho_g, h_{1:T}, \sigma^2$
5. Семплирование $\rho_g | \tilde{\pi}, \tilde{\pi}_k^e, \{\mu_k\}_{k=0}^N, \theta_{par}, h_{1:T}, \sigma^2$
6. Семплирование $h_{1:T} = (h_{1:T}^0, \dots, h_{1:T}^N, h_{1:T}^{\pi}, q_{1:T}^{\pi}) | \tilde{\pi}, \tilde{\pi}_k^e, \{\mu_k\}_{k=0}^N, \theta_{par}, \rho_g, \sigma^2$
7. Семплирование $\sigma^2 = (\sigma_0^2, \dots, \sigma_N^2, \sigma_{ek}^2, \sigma_{\pi e}^2) | \tilde{\pi}, \tilde{\pi}_k^e, \{\mu_k\}_{k=0}^N, \theta_{par}, \rho_g, h_{1:T}$
8. Семплирование
 - a. ψ для спецификации NIER
 - b. sw_j для спецификации BMA.

В.1. Тренды реальных переменных

Тренд эталонной переменной типа DFM может быть выбран как нормальный вектор с матрицей концентрации V_{μ_0} и средним значением m_{μ_0} :

$$\begin{aligned}
V_{\mu_0} = & H_g' S_0^{-1} H_g + H_{\alpha 1}' D_0^{-1} H_{\alpha 1} + \sum_{j=1}^N H_{Bj}' S_j^{-1} H_{Bj} + H_{\lambda}' S_{\pi}^{-1} H_{\lambda} \\
m_{\mu_0} = & V_{\mu_0}^{-1} \left(H_g' S_0^{-1} H_g y_0 + H_{\alpha 1}' D_0^{-1} H_{\alpha 2} \tilde{\mu}_0 + \sum_{j=1}^N H_{Bj}' S_j^{-1} (H_{Bj} y_0 - (y_j - \mu_j)) \right. \\
& \left. + H_{\lambda}' H_{\varphi}' S_{\pi}^{-1} H_{\varphi} (H_{\lambda} y_0 - (\hat{\pi} - \tilde{\pi})) \right)
\end{aligned}$$

Также зададим $g = y_0 - \mu_0$. Тогда каждый отдельный тренд реальной переменной, кроме эталонной переменной, может быть выбран как нормальная случайная переменная с матрицей концентрации V_{μ_n} и средним значением m_{μ_n} , $n = 1..N$:

$$V_{\mu_n} = S_n^{-1} + H'_{\alpha 1} D_n^{-1} H_{\alpha 1}$$

$$m_{\mu_n} = V_{\mu_n}^{-1} (S_n^{-1} (y_n - H_{Bn} g) + H'_{\alpha 1} D_n^{-1} H_{\alpha 2} \tilde{\mu}_n)$$

Тренды реальных переменных для других рассматриваемых моделей могут быть выбраны следующим образом:

Общий тренд

В случае, когда $\mu_0 = \mu_n$ для $n = 1..N$, общий тренд выбирается как нормальная случайная величина со следующими параметрами:

$$V_{\mu} = H'_g S_0^{-1} H_g + H'_{\alpha 1} D_0^{-1} H_{\alpha 1} + \sum_{j=1}^N (I_T + H'_{Bj}) S_j^{-1} (I_T + H_{Bj}) + H'_{\lambda} S_{\pi}^{-1} H_{\lambda}$$

$$m_{\mu} = V_{\mu}^{-1} \left(H'_g S_0^{-1} H_g y_0 + H'_{\alpha 1} D_0^{-1} H_{\alpha 2} \tilde{\mu}_0 + \sum_{j=1}^N (I_T + H'_{Bj}) S_j^{-1} (H_{Bj} y_0 - y_j) + H'_{\lambda} H'_{\varphi} S_{\pi}^{-1} H_{\varphi} (H_{\lambda} y_0 - (\hat{\pi} - \tilde{\pi})) \right)$$

Трехмерная модель

В случае трехмерной модели с реальным выпуском (реальным ВВП или ИПП) и уровнем безработицы, тренд выпуска является нормальной случайной величиной с параметрами:

$$V_{\mu_0} = H'_g S_0^{-1} H_g + H'_{\alpha 1} D_0^{-1} H_{\alpha 1}$$

$$m_{\mu_0} = V_{\mu_0}^{-1} \left(H'_g S_0^{-1} H_g (y_0 - \delta_u (u - u^*)) + H'_{\alpha 1} D_0^{-1} H_{\alpha 2} \tilde{\mu}_0 + H'_{\lambda} H'_{\varphi} S_{\pi}^{-1} H_{\varphi} (H_{\lambda} y_0 - (\hat{\pi} - \tilde{\pi})) \right)$$

NAIRU u^* также является нормальной случайной величиной со следующими параметрами:

$$V_{u^*} = \delta_u^2 H'_g S_0^{-1} H_g + H'_{u^*} S_0^{-1} H_{u^*} + H'_{\alpha 1} D_{u^*}^{-1} H_{\alpha 1}$$

$$m_{\mu_0} = V_{\mu_0}^{-1} \left(\delta_u H'_g S_0^{-1} H_g (\delta_u u - (y_0 - \mu_0)) + H'_{\alpha 1} D_{u^*}^{-1} H_{\alpha 2} \tilde{u}_0^* + H'_{\lambda} H'_{\varphi} S_{\pi}^{-1} H_{\varphi} (H_{\lambda} y_0 - (\hat{\pi} - \tilde{\pi})) \right)$$

В.2. Тренд инфляции

Сам тренд инфляции может быть выбран как нормальная случайная величина с параметрами:

$$V_{\tilde{\pi}} = H'_{\varphi} S_{\pi}^{-1} H_{\varphi} + H'_{\rho} D_{\pi} H_{\rho}$$

$$m_{\tilde{\pi}} = V_{\tilde{\pi}}^{-1} \left(H'_{\varphi} S_{\pi}^{-1} H_{\varphi} (\hat{\pi} - H_{\kappa}^0 \tilde{\pi}^e - H_{\lambda} g) \right)$$

Тренд инфляционных ожиданий характеризуется следующими параметрами:

$$V_{\tilde{\pi}^e} = (H_{\kappa}^0)' H'_{\varphi} S_{\pi}^{-1} H_{\varphi} H_{\kappa}^0 + H' D_{\pi e}^{-1} H + \sum_{k=1}^K \kappa_k^2 S_{ek}^{-1}$$

$$m_{\tilde{\pi}^e} = V_{\tilde{\pi}^e}^{-1} \left((H_{\kappa}^0)' H'_{\varphi} S_{\pi}^{-1} H_{\varphi} (\hat{\pi} - \tilde{\pi} - H_{\lambda} g) + \sum_{k=1}^K \kappa_k S_{ek}^{-1} \hat{\pi}^e \right)$$

В.3. Параметры

Все апостериорные значения $(\varphi, \beta, \lambda, \kappa, \rho_{\pi})$ условных параметров могут быть выбраны как простые байесовские значения апостериорных параметров с нормальными априорными распределениями (с нулевым средним) и функциями правдоподобия:

$$V_{\theta_s} = (Z'_s V_s^{-1} Z_s + W_s^{-1}); m_{\theta_s} = V_{\theta_s}^{-1} (Z'_s V_s^{-1} x_s), \quad (E3)$$

где $\theta_s \in \{\varphi, \beta, \lambda, \kappa\}$, Z_φ состоит из q -лагов $\tilde{\pi} = (\hat{\pi} - \tilde{\pi} - H_\kappa^0 \tilde{\pi}^e - H_\lambda(y_0 - \mu_0))$, x_φ — из самой $\tilde{\pi}$; $Z_\beta = X$ и $x_\beta = (\pi - \tilde{\pi} - H_\kappa^0 \tilde{\pi}^e - H_\lambda(y_0 - \mu_0))$; Z_λ состоит из g -лагов g и текущих значений, а $x_\lambda = \hat{\pi} - \tilde{\pi} - H_\kappa^0 \tilde{\pi}^e$. $V_\varphi = S_\pi$, $V_\lambda^{-1} = V_\beta^{-1} = H'_\varphi S_\pi^{-1} H_\varphi$. $Z_{\rho\pi}$ состоит из p -лагов $\tilde{\pi}$, $x_{\rho\pi} = \tilde{\pi}$, $V_{\rho\pi}^{-1} = D_\pi^{-1}$.

Факторные нагрузки B выбираются так же, как и коэффициенты VAR в случае априорного распределения типа Миннесота. Однако, поскольку предполагалась нулевая корреляция между отклонениями реальных переменных, каждый столбец матрицы B можно выбирать отдельно, используя уравнение (E3), где Z_{Bn} состоит из R -лагов g , $x_{Bn} = y_n - \mu_n$ и $V_{Bn}^{-1} = S_n^{-1}$.

Чтобы семплировать ρ_g , необходимо семплировать значения (A, ω) . Для этого добавляется алгоритм Метрополиса — Гастингса с адаптивным шагом (Giordani, Kohn, 2010) к процедуре генератора выборки Гиббса с нормальным вспомогательным распределением случайного блуждания. Основная проблема заключается в том, что параметры (A, ω) ограничены. Следовательно, необходимо ограничить вспомогательное распределение. Опираясь на работу (Neal, 2011), для каждой выборки перед этапом принятия/отклонения рассчитываются вспомогательные параметры pr_i :

$$pr_i = \begin{cases} pr_i^u - (pr_i - pr_i^u), & \text{if } pr_i > pr_i^u \\ pr_i^l + (pr_i^l - pr_i), & \text{if } pr_i < pr_i^l \end{cases}$$

где pr_i^u и pr_i^l — верхняя и нижняя границы pr_i соответственно. Эта процедура повторяется до тех пор, пока не будет справедливо $\forall i: pr_i \in [pr_i^l, pr_i^u]$.

В.4. Дисперсии

Для всех предложенных моделей существует два типа дисперсий: изменяющиеся во времени и постоянные. Изменяющиеся во времени логарифмические дисперсии выбираются, как предложено в работе (Chib, et al, 1998). Постоянные во времени параметры выбираются из обратного гамма-распределения.

В.5. Иерархические параметры байесовского LASSO

Для выборки параметров априорной дисперсии был применен подход, предложенный в работе (Koop, Korobilis, 2011). Чтобы получить иерархическую модель типа LASSO, следует рассмотреть априорную дисперсию семейства экспоненциальных априорных дисперсий для параметра:

$$W_i | \tilde{W} \sim \text{Exp}(0.5 \times \tilde{W})$$

$$\tilde{W} \sim \text{Gamma}(aw_1, aw_2)$$

где $\tilde{W}$ — аналог стандартного штрафного коэффициента LASSO, W_i — априорная дисперсия i -го параметра. Таким образом, апостериорные значения для этих параметров определяются следующим образом:

$$\frac{1}{W_i} | \tilde{\pi}, \tilde{\pi}_k^e, \{\mu_k\}_{k=0}^N, \theta_{par}, \rho_g, h_{1:T}, \sigma^2, Y, X \sim \text{invGauss} \left(\sqrt{\frac{\tilde{W}}{\theta_i^2}}, \tilde{W} \right)$$

$$\tilde{W} | \tilde{\pi}, \tilde{\pi}_k^e, \{\mu_k\}_{k=0}^N, \theta_{par}, \rho_g, h_{1:T}, \sigma^2, Y, X \sim \text{Gamma} \left(k + aw_1, aw_2 + \sum_{j=1}^K W_j \right)$$

В.6. Вероятности SSVS

Другой популярный способ регуляризации параметров заключается в использовании выбора переменной стохастическим поиском (SSVS) с помощью алгоритма из работы (George, et al, 2008). Для каждого параметра θ_i этот алгоритм различает два возможных значения априорной дисперсии: пик $\tilde{W}_{i,H} \rightarrow \infty$ с вероятностью p_i^W и плато $\tilde{W}_{i,L} \rightarrow 0$ с вероятностью $1 - p_i^W$. Вероятность выбирается на дополнительном шаге генератора выборки Гиббса:

$$p_i^W | \tilde{\pi}, \tilde{\pi}_k^e, \{\mu_k\}_{k=0}^N, \theta_{par}, \rho_g, h_{1:T}, \sigma^2, Y, X = (1 + u_i)^{-1}$$

$$u_i = \exp(-0.5 \times \theta_i \{ \tilde{W}_{i.L}^{-1} - \tilde{W}_{i.H}^{-1} \})$$

С. Расчет маргинальной функции правдоподобия

Для каждой из моделей пространства состояний функция маргинального правдоподобия в выборке рассчитывалась с использованием подхода, предложенного в работе (Chib (1995)). Метод основан на следующей формуле:

$$\ln(p(Y|X, \psi)) = \ln(p(Y|\theta^*, X)) + \ln(p(\theta^*|\psi)) - \ln(p(\theta^*|Y, X, \psi))$$

где θ^* — оценка параметра методом MAP или MLE (см. Chib (1995)).

Основной задачей, которую необходимо решить, является расчет слагаемого $\ln(p(\theta^*|Y, X, \psi))$. Это было сделано в несколько этапов.

С.1. Этап 1. Интегрирование по трендам

Следуя подходу, предложенному в работе (Grant, Chan (2017)), совместная плотность была проинтегрирована по всем стохастическим трендам, опираясь на тот факт, что апостериорные значения сглаженных трендов при постоянных других параметрах распределены нормально:

$$p(\theta, h, Y|X, \psi) = \int p(\theta, h, s|X, \psi) ds = p(\theta, h|\psi) \int \exp(-0.5 \times (C_1 + E)) ds$$

$$C_0 = ((n+1) + K)T \ln(2\pi) + \ln \left(|S_0| |S_\pi| |D_0| |D_\pi| \prod_{j=1}^n |S_j| |D_j| \prod_{k=1}^K |S_{ek}| \right)$$

$$C_1 = (n+1)T \ln(2\pi) + C_0$$

$$E = (y_0 - \mu_0)' H_g' S_o^{-1} H_g (y_0 - \mu_0) + \sum_{j=1}^n (y_j - \mu_j - H_{Bj}(y_0 - \mu_0))' S_j^{-1} (y_j - \mu_j - H_{Bj}(y_0 - \mu_0))$$

$$+ (\hat{\pi} - \kappa_0 \tilde{\pi} - H_\lambda(y_0 - \mu_0))' H_\varphi' S_\pi^{-1} H_\varphi (\hat{\pi} - \kappa_0 \tilde{\pi} - H_\lambda(y_0 - \mu_0)) + \sum_{k=1}^K (\hat{\pi}_k^e - \kappa_k \tilde{\pi})' S_{ek}^{-1} (\hat{\pi}_k^e - \kappa_k \tilde{\pi})$$

$$+ (H_{\alpha 1} \mu_0 - H_{\alpha 2} \tilde{\mu}_0)' D_0^{-1} (H_{\alpha 1} \mu_0 - H_{\alpha 2} \tilde{\mu}_0) + \sum_{j=1}^n (H_{\alpha 1} \mu_j - H_{\alpha 2} \tilde{\mu}_j)' D_j^{-1} (H_{\alpha 1} \mu_j - H_{\alpha 2} \tilde{\mu}_j) + \tilde{\pi}' H_\rho' D_\pi^{-1} H_\rho \tilde{\pi}$$

где $\hat{\pi} = infl - X\beta$. Совместная плотность распределения для каждой из моделей в подразделе 3.1 может быть представлена формулой выше. Для спецификации тренда LLT $H_{\alpha 1} = H^2$, $H_{\alpha 2} = H$, $\tilde{\mu}_0 = e_T^1 \mu_{00}$; для спецификации тренда RWD $H_{\alpha 1} = H$, $H_{\alpha 2} = I_T$, $\tilde{\mu}_0 = e_T^1 \mu_{00} + i_T \alpha$; и, наконец, для спецификации тренда RW: $H_{\alpha 1} = H$, $H_{\alpha 2} = I_T$, $\tilde{\mu}_0 = e_T^1 \mu_{00}$.

Определим:

$$V_0^{-1} = H_g' S_o^{-1} H_g + \sum_{j=1}^n H_{Bj}' S_j^{-1} H_{Bj} + H_\lambda' H_\varphi' S_\pi^{-1} H_\varphi H_\lambda + \sum_{k=1}^K S_{ek}^{-1}$$

$$K_{\mu_0 \mu_0} = H_{\alpha 1}' D_0^{-1} H_{\alpha 1} + V_0^{-1}$$

$$K_{\mu_j \mu_j} = H_{\alpha 1}' D_0^{-1} H_{\alpha 1} + H_j' S_j^{-1} H_j$$

$$K_{\tilde{\pi} \tilde{\pi}} = H_\rho' D_\pi^{-1} H_\rho + \kappa_0^2 H_\varphi' S_\pi^{-1} H_\varphi + \sum_{k=1}^K \kappa_k^2 S_{ek}^{-1}$$

$$K_{\mu_0 \mu_j} = H_{Bj}' S_j^{-1}$$

$$K_{\mu_0 \tilde{\pi}} = \kappa_0 H_\lambda' H_\varphi' S_\pi^{-1} H_\varphi + \sum_{k=1}^K \kappa_k H_{\lambda k}' S_{ek}^{-1}$$

$$\begin{aligned}
m_{\mu_0} &= H'_{\alpha 1} D_0^{-1} H_{\alpha 2} \tilde{\mu}_0 + V_0^{-1} y_0 - \sum_{j=1}^n H'_{Bj} S_j^{-1} y_j - \sum_{k=1}^K H'_{\lambda k} S_{ek}^{-1} \hat{\pi}_k^e - H'_{\lambda} H'_{\varphi} S_{\pi}^{-1} H_{\varphi} \hat{\pi} \\
m_{\mu_j} &= H'_{\alpha 1} D_0^{-1} H_{\alpha 2} \tilde{\mu}_j + S_j^{-1} H_{Bj} (y_j - y_0) \\
m_{\tilde{\pi}} &= \kappa_0 H'_{\varphi} S_{\pi}^{-1} H_{\varphi} (\hat{\pi} - H_{\lambda} y_0) + \sum_{k=1}^K \kappa_k S_{\pi}^{-1} (\hat{\pi}_k^e - H_{\lambda k} y_0) \\
R &= y'_0 \left(\sum_{j=1}^n H'_{Bj} H'_j S_j^{-1} H_j H_{Bj} y_j + H'_{\varphi} S_{\pi}^{-1} H_{\varphi} \hat{\pi} + \sum_{k=1}^K S_{ek}^{-1} \hat{\pi}_k^e \right) + y'_0 V_0^{-1} y_0 + \sum_{j=1}^n y'_j S_j^{-1} y_j \\
&\quad + \hat{\pi}' H'_{\varphi} S_{\pi}^{-1} H_{\varphi} \hat{\pi} + \sum_{k=1}^K \hat{\pi}_k' S_{ek}^{-1} \hat{\pi}_k \\
s &= \begin{bmatrix} \mu_0 \\ \mu_{1:n} \\ \tilde{\pi} \end{bmatrix}; K = \begin{bmatrix} K_{\mu_0 \mu_0} & -K'_{\mu_0 \mu_{1:n}} & -K'_{\mu_0 \tilde{\pi}} \\ -K_{\mu_0 \mu_{1:n}} & K_{\mu_{1:n} \mu_{1:n}} & 0 \\ -K_{\mu_0 \tilde{\pi}} & 0 & K_{\tilde{\pi} \tilde{\pi}} \end{bmatrix}; m_s = \begin{bmatrix} m_{\mu_0} \\ m_{\mu_{1:n}} \\ m_{\tilde{\pi}} \end{bmatrix}; \\
\mu_{1:n} &= [\mu_1, \dots, \mu_n]'; m_{\mu_{1:n}} = [m_{\mu_1}, \dots, m_{\mu_n}]'; K_{\mu_{1:n} \mu_{1:n}} = \begin{bmatrix} K_{\mu_1 \mu_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & K_{\mu_n \mu_n} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Таким образом:

$$\begin{aligned}
p(\theta, h, Y|X, \psi) &= p(\theta, h|\psi) \int \exp(-0.5 \times (C_1 + R + s' K s - 2s' m_s)) ds \\
&= p(\theta, h|\psi) \int \exp(-0.5 \times (C_1 + R + s' K s - 2s' m_s)) ds \\
&= p(\theta, h|\psi) \exp(-0.5(C_1 + R - m'_s K^{-1} m_s)) \int \exp(-0.5 (s - K^{-1} m_s)' K (s - K^{-1} m_s)) ds \\
&= p(\theta|\psi) \exp(-0.5 \times (C_1 + R - m'_s K^{-1} m_s - (n+1)T \ln(2\pi) + |K|))
\end{aligned}$$

Наконец:

$$p(\theta, h, Y|X, \psi) = p(\theta|\psi) \exp(-0.5 \times (C_0 + R - m'_s K^{-1} m_s + |K|))$$

С.2. Этап 2. Применение теоремы Рао — Блэквелла в отношении других ненаблюдаемых переменных.

На следующем этапе процедуры стохастическая волатильность и изменяющиеся во времени параметры должны быть проинтегрированы. В работе (Chib, (1995)) используется следующая аппроксимация на основе процедуры Рао — Блэквеллизации:

$$p(\theta^s, Y|X, \psi) = \int p(\theta^s, h, Y|X, \psi) dh \approx \sum_{s=1}^{N_{smp}} p(\theta^s, h^s, Y|X, \psi)$$

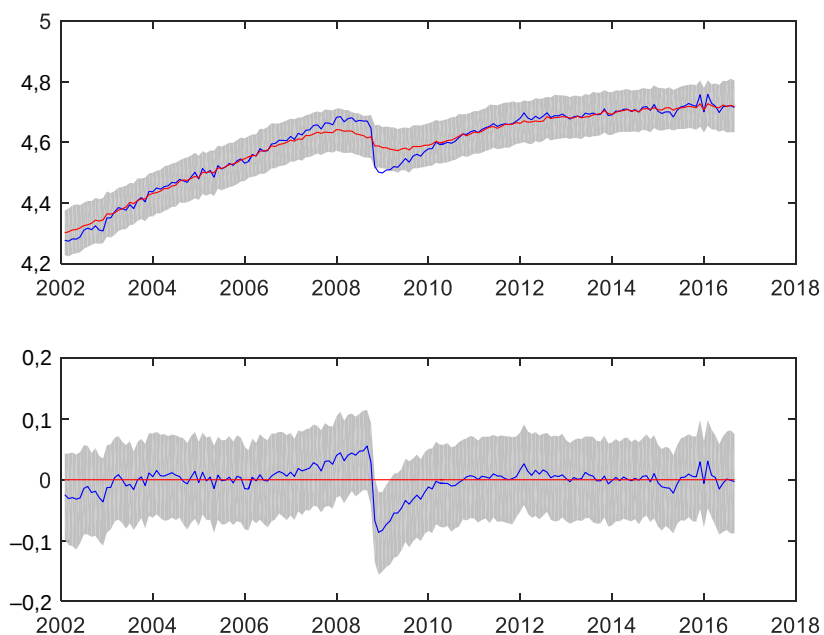
где θ^s и h^s — выборки Гиббса для параметров и скрытых состояний соответственно.

С.3. Этап 3. Интегрирование с учетом параметров

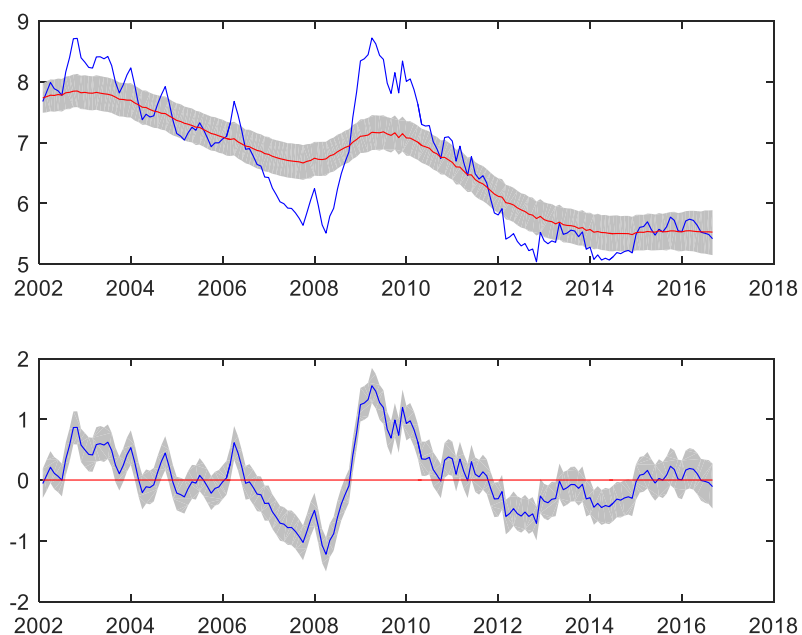
Напомню, что за исключением случаев иерархической регрессии LASSO и BMA все блоки параметров в модели не зависят от стохастической волатильности и других ненаблюдаемых компонентов. Это означает, что выборка параметров по блокам эквивалентна выборке всего вектора параметров одновременно.

Это означает, что алгоритмы из работы (Chib, 1995) в данном случае можно выполнить семплированием в один этап, что значительно ускоряет процедуру. Для спецификаций BMA и HIER длина лага ограничена значением 4 для ежеквартальных данных. Лаги также подвергаются регуляризации.

D. Сглаженные оценки трендовых и циклических компонент для спецификации модели DFM
ИНДЕКС РЕАЛЬНОГО ПРОМЫШЛЕННОГО ПРОИЗВОДСТВА (ИПП)



УРОВЕНЬ БЕЗРАБОТИЦЫ (UNEMP)



Е. Тестовые Р-значения критерия Дибольда — Мариано. Ежемесячные данные.

	1 мес	3 мес	6 мес	9 мес	12 мес	В годовом исчислении
UCSVMAX DFM IPI IRW	0,243084	0,623467	0,485165	0,454396	0,800326	0,551413
UCSVMAX DFM EXP IRW	0,313847	0,936402	0,715871	0,518548	0,799569	0,732703
UCSVMAX DFM IMP IRW	0,369225	0,691148	0,932712	0,701229	0,839599	0,818643
UCSVMAX DFM EMP RWD	0,330527	0,830042	0,884428	0,824101	0,69778	0,978125
UCSVMAX DFM CONSTR RWD	0,367426	0,315145	0,387986	0,990012	0,301387	0,406798
UCSVMAX DFM CARGO IRW	0,037776	0,504345	0,349615	0,318592	0,168596	0,256721
UCSVMAX DFM BUSCONF RW	0,037703	0,386058	0,461532	0,365877	0,170986	0,238683
UCSVMAX DFM RETAIL RWD	0,060317	0,587985	0,181586	0,259062	0,138794	0,154487
UCSVMAX DFM UNEMP RW	0,275173	0,402008	0,176482	0,189468	0,122339	0,186515
UCSVMAX CT IPI IRW	0,084826	0,698901	0,758127	0,629849	0,893617	0,932823
UCSVMAX TVM	0,099277	0,471157	0,962356	0,969763	0,063714	0,151712
UCSVMAX BVM IPI IRW	0,158088	0,594572	0,797228	0,772336	0,36613	0,930339
UCSVMAX BVM EXP IRW	0,003476	0,852879	0,750908	0,900599	0,716301	0,817526
UCSVMAX BVM BUSCONF RWD	0,012557	0,460671	0,866102	0,628565	0,295	0,350376
UCSVMAX BVM UNEMP RW	0,064172	0,897395	0,884676	0,925287	0,403025	0,755329
UCSVMAX BVM CARGO RW	0,131731	0,200466	0,120625	0,177953	0,055412	0,090657